Grundlagen der W'keitsrechnung

Einführung

Grundbegriffe bei Zufallsexperimenten

Grundraum Ω	Menge *aller* möglichen Ausgänge
Elementarereignis $\omega \in \Omega$	Einzelner Ausgang
Ereignis $A \subseteq \Omega$	Kollektion von Elementarereignissen

Tricks mit Mengen

$A \setminus B = A \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ (disjunkte Vereinigung)

Axiome

(A1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(A3) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, falls A, B disjunkt
(bzw. auch allgemeiner für abzählbar viele disjunkte A_j's)

Rechenregeln

$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

$B \subseteq A : \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

$B \subseteq A : \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$

Diskrete W'keitsmodelle

Allgemein

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ (endlich oder abzählbar)

$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k : \omega_k \in A} \mathbb{P}(\omega_k),$$

Bsp: $A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_7\} : \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_5) + \mathbb{P}(\omega_7)$

Modell von Laplace

Alle Elementarereignisse sind *gleich* wahrscheinlich

$$\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{|\Omega|}, |\Omega| < \infty$$

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (Anzahl günstige Fälle durch Anzahl mögliche Fälle)

Unabhängigkeit

Definition

A, B unabhängig $\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Via bedingte W'keiten:
A, B unabhängig $\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ bzw. $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$

Bedingte W'keiten

Definition

Frage: Wie gross ist die W'keit von A, wenn wir *wissen*, dass B eingetreten ist?

$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ "W'keit von A *gegeben* B"

Einige Rechenregeln

$\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ mit B *fix* erfüllt alle Regeln für eine W'keit

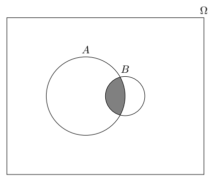
Bsp: $\mathbb{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)$

Pitfalls

Allgemein: Intuition bei bedingten W'keiten oft schwierig

Hilfsbild:



i.A.: $\mathbb{P}(A \mid B) \neq \mathbb{P}(B \mid A)$

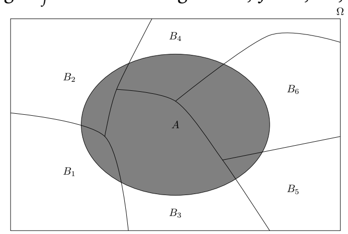
i.A.: $\mathbb{P}(A \mid B) \neq 1 - \mathbb{P}(A \mid B^c)$

Wichtige Sätze

Satz der totalen W'keit

Idee: W'keit aufteilen

Voraussetzung: B_j Partitionierung von Ω, $j = 1, \ldots, k$



$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A \mid B_j) \mathbb{P}(B_j)$$

Satz von Bayes

Idee: Bedingte W'keit umkehren

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Im Setup des Satzes der totalen W'keit:

$$\mathbb{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_i) \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{l=1}^{k} \mathbb{P}(A \mid B_l) \mathbb{P}(B_l)}$$

Lukas Meier, meier@stat.math.ethz.ch