REDONDEOS EN UNA TABLA

Ejemplo.- En un municipio se ha obtenido la siguiente tabla de datos sobre el gasto anual en luz, agua, gas y teléfono según el tipo de unidad familiar. Se desea publicar dicha tabla redondeando sus datos a números enteros de forma que los totales marginales sean correctos.

	Unipersonal	*Pareja*	*Pareja con 1 niño*	*Pareja con 2 ó más niños*	*Pareja de jubilados*	**TOTAL**
Luz	167,73	203,24	238,59	245,69	198,57	1053,82
Agua	58,27	85,39	102,72	130,47	62,18	439,03
Gas	380,85	490,93	543,68	610,12	420,43	2446,01
Teléfono	240,68	280,37	289,31	313,84	250,49	1374,69
TOTAL	847,53	1059,93	1174,30	1300,12	931,67	5313,55

Planteamiento.- Sea una tabla bidimensional con datos fraccionarios a_{ij}, $\forall i \in \{1,\cdots,m\}$, $\forall j \in \{1,\cdots,n\}$ y totales marginales $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ $\forall i \in \{1,\cdots,m\}$, $s_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ $\forall j \in \{1,\cdots,n\}$. Se desea obtener una tabla redondeando cada dato a_{ij}, r_i, s_j $\forall i, j$ por exceso o por defecto, de forma que los nuevos totales marginales sean correctos (*redondeo consistente*).

Modelización.- Sean las variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \text{ se redondea por exceso} \\ 0 & \text{si } a_{ij} \text{ se redondea por defecto} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } r_i \text{ se redondea por exceso} \\ 0 & \text{si } r_i \text{ se redondea por defecto} \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si } s_j \text{ se redondea por exceso} \\ 0 & \text{si } s_j \text{ se redondea por defecto} \end{cases}$$

Un redondeo consistente debe cumplir las condiciones siguientes:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\lfloor a_{ij} \rfloor + x_{ij} \right) = \lfloor r_i \rfloor + y_i \quad \forall i \in \{1,\cdots,m\} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\lfloor a_{ij} \rfloor + x_{ij} \right) = \lfloor s_j \rfloor + z_j \quad \forall j \in \{1,\cdots,n\} \tag{2}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ y_i \in \{0,1\},\ z_j \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,\cdots,m\},\ \forall j \in \{1,\cdots,n\} \tag{3}$$

Si un dato a_{ij}, r_i, s_j es entero no se redondea, esto es, su variable x_{ij}, y_i, z_j será 0.

Si existen múltiples redondeos consistentes puede ser interesante minimizar la suma total de redondeos efectuados. Sea $f(d)$ la parte fraccionaria del número real *d*, esto es $f(d) = d - \lfloor d \rfloor$. Si el dato d se redondea por exceso el valor del redondeo realizado es $1 - f(d)$, mientras que si se redondea por defecto es $f(d)$. Si *v* es su variable 0-1 asociada al redondeo el valor de éste es $(1 - f(d))v + f(d)(1 - v) = f(d) + (1 - 2f(d))v$.

El problema a resolver es:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} h_i y_i + \sum_{j=1}^{n} k_j z_j + T \qquad (4)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - y_i = f_i \quad \forall i \in \{1,\cdots,m\} \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - z_j = g_j \quad \forall j \in \{1,\cdots,n\} \qquad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ y_i \in \{0,1\},\ z_j \in \{0,1\}\ \forall i \in \{1,\cdots,m\},\ \forall j \in \{1,\cdots,n\} \qquad (7)$$

siendo

$$c_{ij} = \begin{cases} 1-2f(a_{ij}) & \text{si } a_{ij} \notin Z \\ M & \text{si } a_{ij} \in Z \end{cases},\quad h_i = \begin{cases} 1-2f(r_i) & \text{si } r_i \notin Z \\ M & \text{si } r_i \in Z \end{cases},\quad k_j = \begin{cases} 1-2f(s_j) & \text{si } s_j \notin Z \\ M & \text{si } s_j \in Z \end{cases}$$

$$T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(a_{ij}) + \sum_{i=1}^{m} f(r_i) + \sum_{j=1}^{n} f(s_j),\quad f_i = \lfloor r_i \rfloor - \sum_{j=1}^{n} \lfloor a_{ij} \rfloor,\quad g_j = \lfloor s_j \rfloor - \sum_{i=1}^{m} \lfloor a_{ij} \rfloor$$

$M \gg 0$ una constante para no redondear los datos enteros

Sumando las ecuaciones (*5*) en i y las ecuaciones (*6*) en j, se observa que toda solución factible de (*5*) - (*6*) cumple también la condición $\sum_{i=1}^{m}\left(\lfloor r_i \rfloor + y_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\lfloor s_j \rfloor + z_j\right)$, con lo cual los totales por filas y columnas en la tabla redondeada son iguales.

Modelización como problema de flujo.- Se construye una red con los siguientes elementos. Se crea un vértice R_i $\forall i \in \{1,\cdots,m\}$ para cada fila de la tabla, un vértice S_j $\forall j \in \{1,\cdots,n\}$ para cada columna de la tabla, un vértice fuente A y un vértice sumidero Z. Se crean los arcos $(\mathrm{A},\mathrm{R}_i)$ $\forall i$ con cotas $\left(\lfloor r_i \rfloor, \lceil r_i \rceil\right)$, los arcos $(\mathrm{S}_j,\mathrm{Z})$ $\forall j$ con cotas $\left(\lfloor s_j \rfloor, \lceil s_j \rceil\right)$ y los arcos $(\mathrm{R}_i,\mathrm{S}_j)$ $\forall i,j$ con cotas $\left(\lfloor a_{ij} \rfloor, \lceil a_{ij} \rceil\right)$. Cualquier flujo compatible en esta red proporciona un redondeo consistente. Si no existe flujo compatible entonces no existe redondeo consistente.

Si se asignan costes $1-2f(r_i)$ a los arcos $(\mathrm{A},\mathrm{R}_i)$ $\forall i$, costes $1-2f(s_j)$ a los arcos $(\mathrm{S}_j,\mathrm{Z})$ $\forall j$ y costes $1-2f(a_{ij})$ a los arcos $(\mathrm{R}_i,\mathrm{S}_j)$ $\forall i,j$, se tiene un problema de flujo de coste mínimo.