ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

DMATH
Department of Mathematics

Mathematik IV: Statistik

für D-UWIS, D-ERDW, D-USYS und D-HEST – SS15

Repetition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Kap. 2.3

Hinter einer der drei Türen ist ein Auto zu gewinnen!

- Das Auto wurde zufällig platziert!

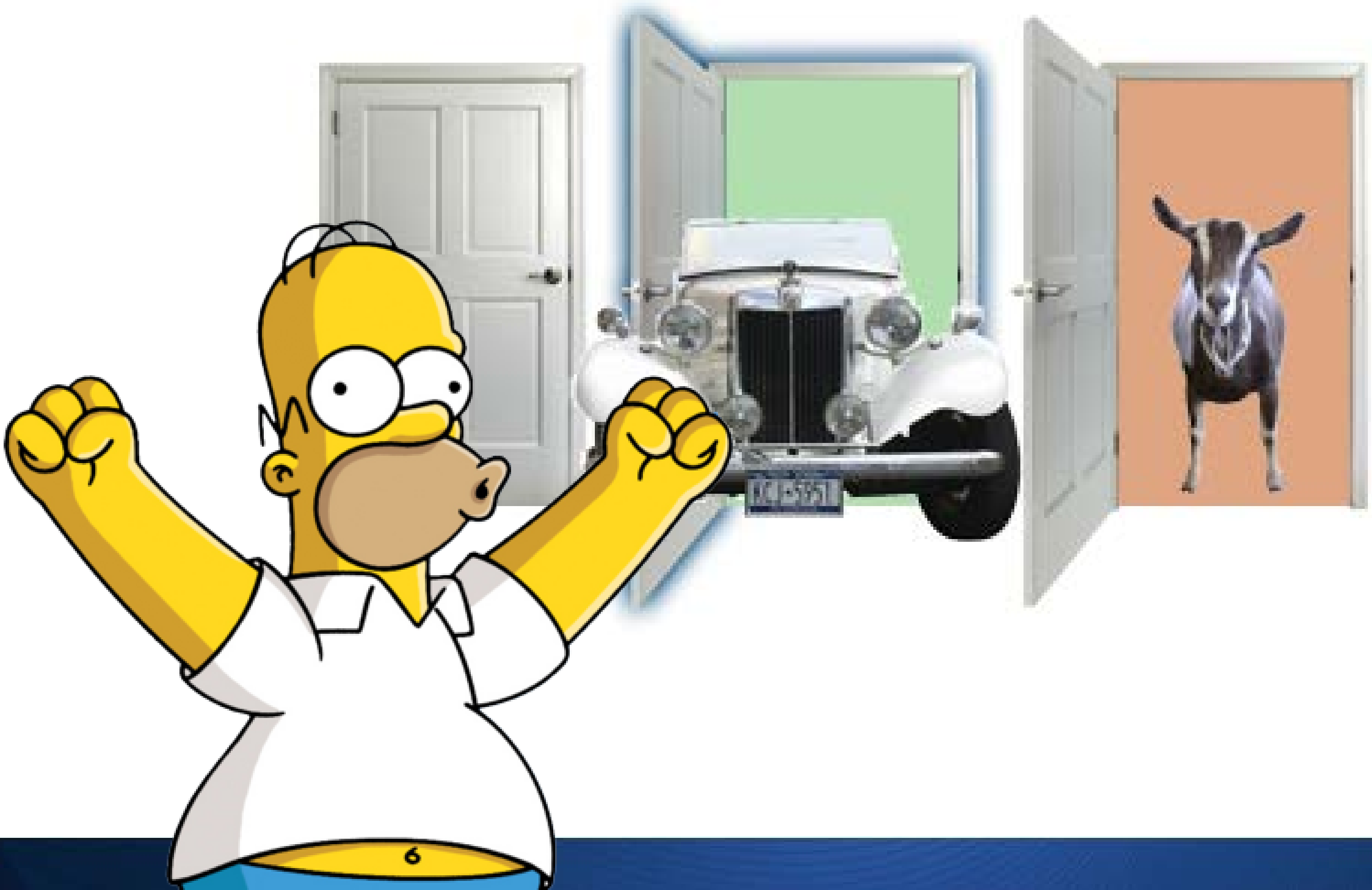
Sie wählen Tür 1

Ich zeigen Ihnen nun, wo das Auto nicht ist:

- Wollen Sie die ursprünglich gewählte Türe wechseln?

  - Ja, ich möchte zur 2. Türe wechseln!
  - Nein, ich bleibe bei meiner 1. Wahl.

Sie wechseln auf die 2. Türe



Repetition: Bedingt Wahrscheinlichkeit

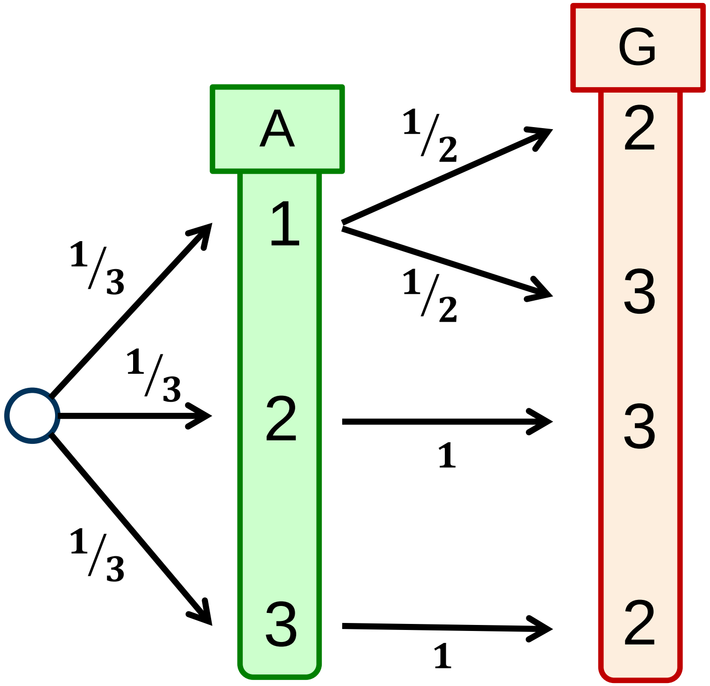
- Monty-Hall Problem:
  - Lohnt es sich zu wechseln?
- A = Nummer von Tür mit Auto
  G = Nummer der geöffneten Tür

- Ist $P[A = 2|G = 3]$ grösser als $P[A = 1|G = 3]$?
  - falls ja, dann sollten Sie wechseln
  - falls nein, sollten Sie bei Ihrer 1. Wahl bleiben

- $P[A = 2|G = 3] = \frac{P[A=2 \cap G=3]}{P[G=3]}$
- $P[A = 1|G = 3] = \frac{P[A=1 \cap G=3]}{P[G=3]}$

Repetition: Bedingt Wahrscheinlichkeit

- Monty-Hall Problem:
  - Lohnt es sich zu wechseln?
- A = Nummer von Tür mit Auto
  G = Nummer der geöffneten Tür



$$P[A = 1 \cap G = 2] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P[A = 1 \cap G = 3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P[A = 2 \cap G = 3] = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

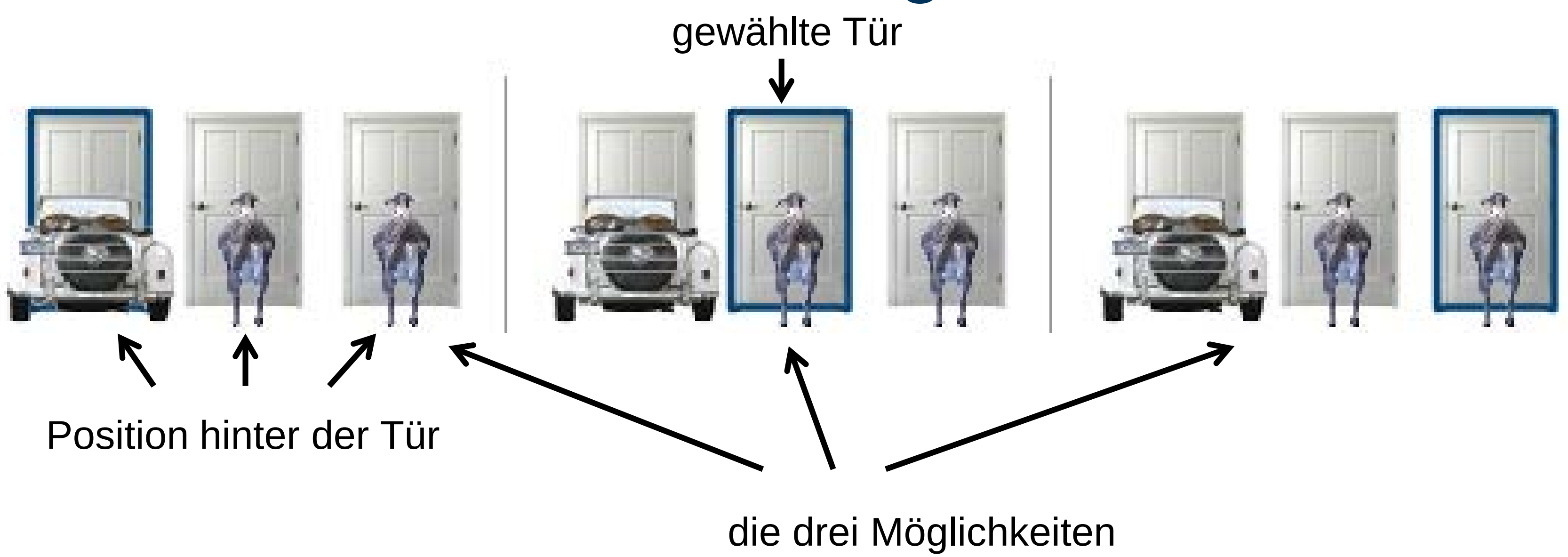
$$P[A = 3 \cap G = 2] = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Repetition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Was fehlt uns noch, um die bed. W'keit zu berechnen?
  - $P[G = 3] = ?$
- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:
  - $P[G = 3] = P[A = 1 \cap G = 3] + P[A = 2 \cap G = 3] + P[A = 3 \cap G = 3]$
    $= {}^{1}/_{6} + {}^{1}/_{3} + 0 = {}^{1}/_{2}$
- Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:
  - $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$
  - $P[A = 2|G = 3] = \frac{P[A=2 \cap G=3]}{P[G=3]} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$
  - $P[A = 1|G = 3] = \frac{P[A=1 \cap G=3]}{P[G=3]} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$

es lohnt sich zu wechseln!

…immer noch nicht überzeugt?



- Wenn Sie ***immer wechseln***, dann gewinnen Sie in zwei von drei möglichen Fällen.
- Wenn Sie ***immer bleiben***, dann gewinnen Sie in einem von drei möglichen Fällen.

Lernziele heute

- Den Begriff der Zufallsvariable (ZV) und ...
- ... der Wahrscheinlichkeitsverteilung, sowie deren Kennzahlen kennen
- wissen, was eine Binomialverteilung ist

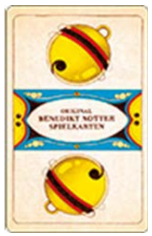
Hausaufgaben

- Skript: Kapitel 2.4 – 2.6 lessen
- Serie 3 lösen
- Quiz 3 bearbeiten
- etutoR 2 anschauen

2.4 Zufallsvariablen

- Beispiel Jasskarten (ohne Trumpf)

$\omega = As$



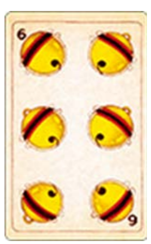
$\mapsto \quad X(\omega) = 11$

$\omega = König$

$\mapsto \quad X(\omega) = 4$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\omega = Sächsi$



$\mapsto \quad X(\omega) = 0$

X eine Funktion:

$$X\colon \ \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega)$$

Wahrscheinlichkeit für eine Zahl x

- $P[X = x] = P[\{\omega | X(\omega) = x\}] = \sum_{\omega; X(\omega)=x} P[\omega]$
- Bsp. Jasskarten
  - Wahrscheinlichkeit für Zahl 4, d.h. $P[X = 4]$
  - $= P[\{\omega; \omega = \text{irgendein König}\}]$
  - = P[Eicheln-König]+P[Rosen-König]+P[Schellen-König]+P[Schilten-König]

  - $= {}^{1}/_{36} + {}^{1}/_{36} + {}^{1}/_{36} + {}^{1}/_{36} = {}^{4}/_{36} = {}^{1}/_{9} \approx 11\%$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Liste aller $P[X=x]$ für alle möglichen Werte x
- Es gilt immer:

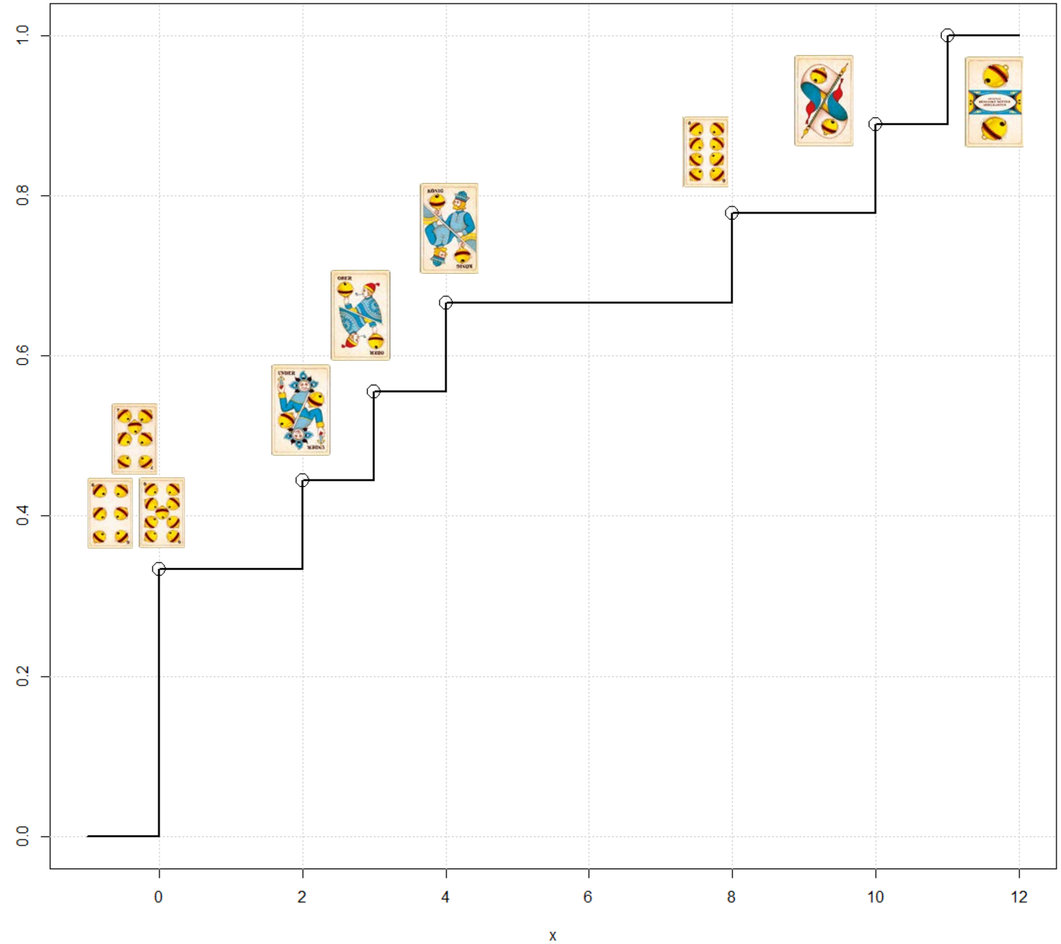
$$\sum_{\text{alle möglichen } x} P[X = x] = 1$$

- Bsp. Jasskarten (ohne Trumpf)

x	0	2	3	4	8	10	11
$P[X=x]$	$^{12}/_{36}$	$^{4}/_{36}$	$^{1}/_{9}$	$^{1}/_{9}$	$^{1}/_{9}$	$^{1}/_{9}$	$^{1}/_{9}$

Kumulative Verteilungsfunktion

- $P[X \leq x] = \sum_{z \leq x} P[X = z]$
  - monoton steigend von 0 bis 1



x	0	2	3	4	8	10	11
$P[X = x]$	$^{12}/_{36}$	$^{4}/_{36}$	$^{1}/_{9}$	$^{1}/_{9}$	$^{1}/_{9}$	$^{1}/_{9}$	$^{1}/_{9}$

2.6 Kennzahlen einer Verteilung

- Erwartungswert (*engl. mean*) von X

$$E(X) = \sum_x x \cdot P[X = x]$$

- Standardabweichung (*engl. standard deviation*) von X

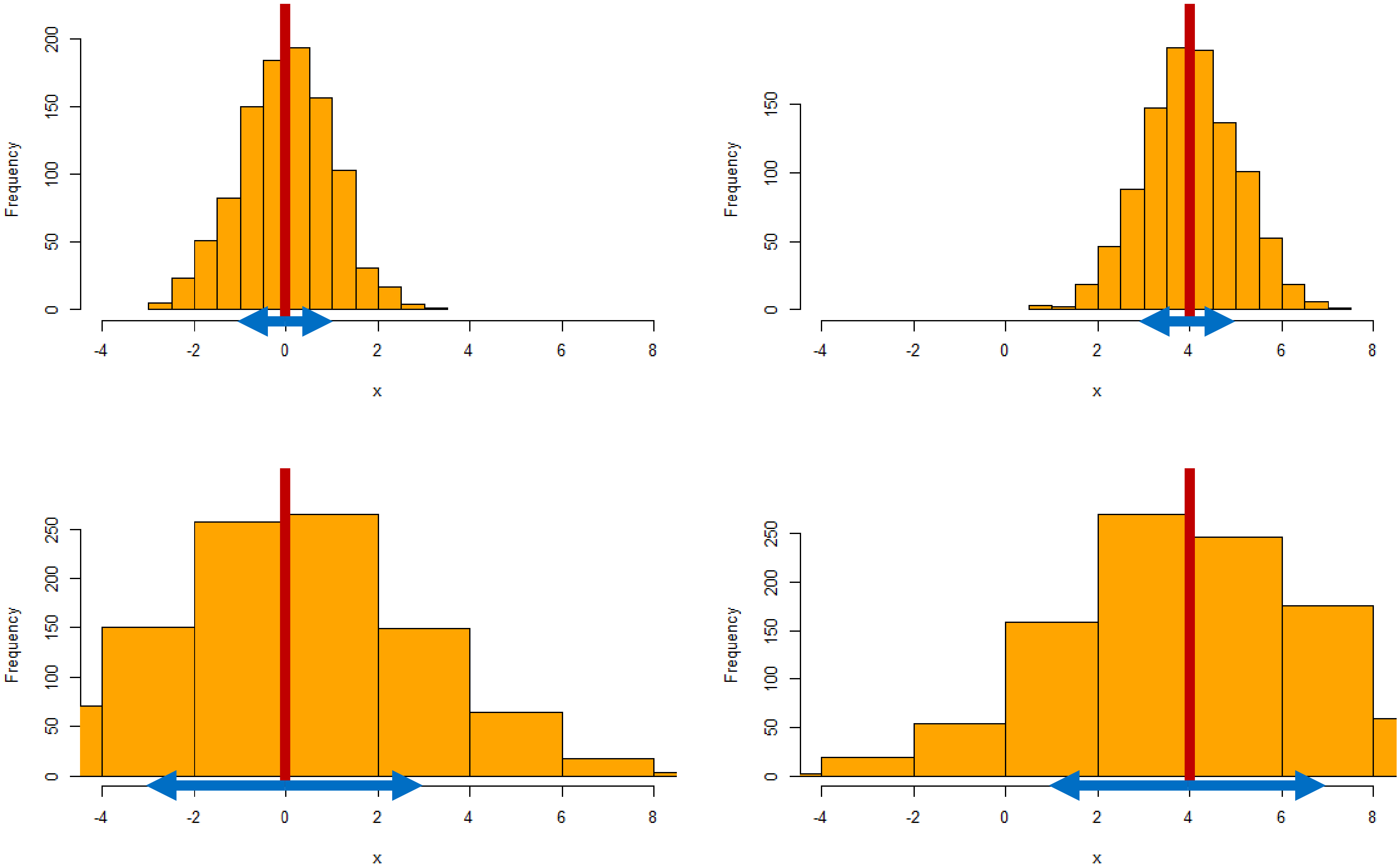
$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

- ...wobei die Varianz (*engl. variance*) von X

$$Var(X) = \sum_x (x - E[X])^2 \cdot P[X = x]$$

- Beispiel: **Jasskarten**
  - $E(X) = 0 \cdot \frac{3}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9} + 11 \cdot \frac{1}{9} \approx 4.2$
  - $Var(X) = \frac{3}{9}(0 - 3.3)^2 + \frac{1}{9}(2 - 3.3)^2 + \cdots + \frac{1}{9}(11 - 3.3)^2 \approx 17.1 \;\rightarrow \sigma(X) \approx 4.1$

Erwartungswert und Standardabweichung



2.5 Binomialverteilung

- Wie oft klingen die Gläser, wenn n Personen miteinander anstossen?

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

- Wie viele Möglichkeiten gibt es 6 Zahlen aus 45 auszuwählen (Lotto)?

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{45}{6} = 8145060$$

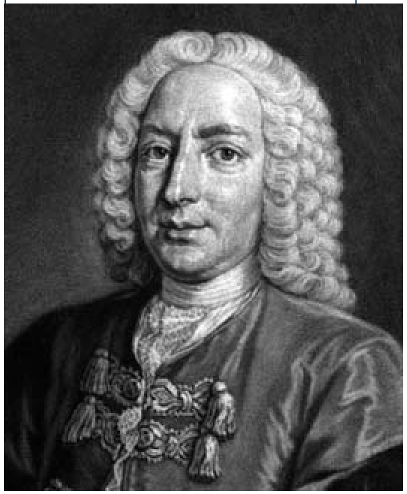
- Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Objekte aus n möglichen ohne zurücklegen zu ziehen?

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Bernoulliverteilung



$$P[X = 1] = \pi$$
$$P[X = 0] = 1 - \pi$$
$$0 \leq \pi \leq 1$$

- Verteile x Gewinne auf n Lose
  - n Lose sind unabhängig
  - π ist für alle Lose gleich
  - X ist die ZV für Gewinn/Niete

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei n Losen x Gewinne zu haben?

- Annahmen:
  - W'keit für einen Gewinn π ist für alle Lose gleich
  - Lose sind unabhängig voneinander

- Mögliche Antworten:
  - A: $P[X = x] = \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$
  - B: $P[X = x] = \pi^x$
  - C: $P[X = x] = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$
  - D: $P[X = x] = \binom{n}{x} \pi^{n-x} (1 - \pi)^x$

Binomialverteilung

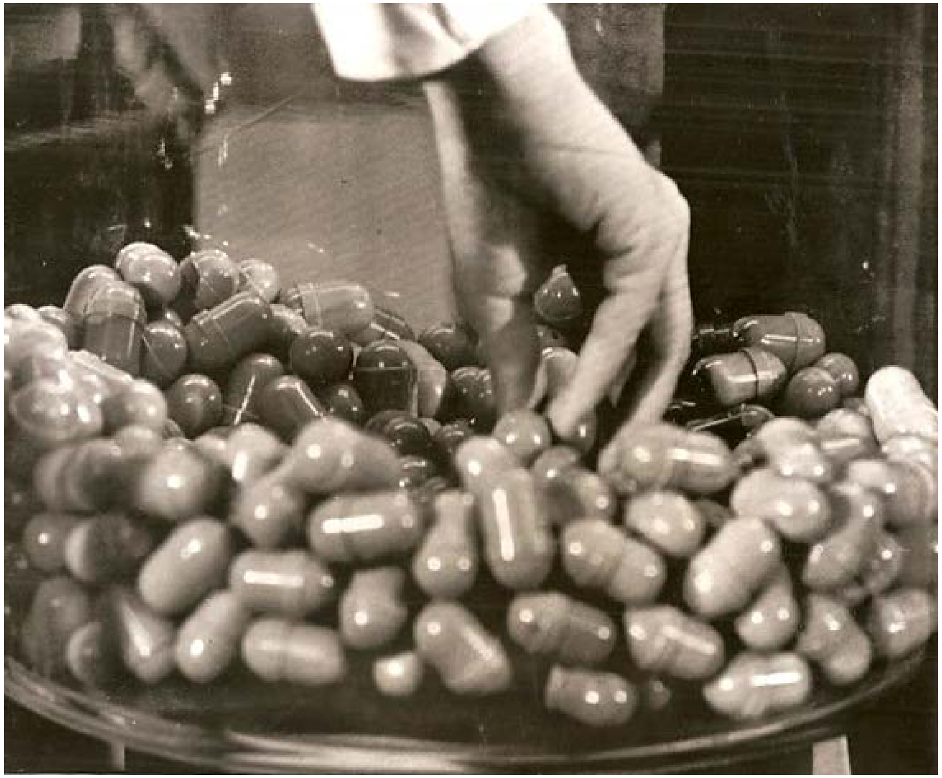
$$P[X = x] = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Konvention
  - Wenn X binomialverteilt mit Parameter n und $\pi \Leftrightarrow X \sim Bin(n, \pi)$.

- Kennzahlen, wenn $X \sim Bin(n, \pi)$
  - $E(X) = n \cdot \pi$
  - $Var(X) = n \cdot \pi(1-\pi)$

- Beispiel: $X \sim Bin(10, 0.1)$
  - $P[X = 0] = \binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0.9^{10} \approx 0.35$
  - $P[X \leq 1] = P[X = 0] + P[X = 1] \approx 0.35 + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9 \approx 0.35 + 0.39 = 0.74$

Geburtstagslotto



…zur gleichen Zeit im Geheimversteck der Lotto-Fee

- ZV X: Anzahl Gewinner im Geburtstagslotto
- $X \sim Bin(n, \pi) = Bin(250, \frac{12}{365})$

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es keine Gewinner gibt?

$$P[X = 0] = \binom{250}{0} \cdot \left(\frac{12}{365}\right)^0 \cdot \left(\frac{353}{365}\right)^{250} \approx 0.0002$$

…zur gleichen Zeit im Geheimversteck der Lotto-Fee

- Wieviele Preise muss ich bereitstellen, damit ich mit 99% W'keit genug habe? → *99%-Quantil, 99% value at risk*
  - Lösung: Finde c, sodass $P[X \leq c] = 0.99$

- Erstelle eine Tabelle:
  - Für 0 Preise: $P[X \leq 0] = P[X = 0] \approx 0.0002$
  - Für 1 Preis: $P[X \leq 1] = P[X = 0] + P[X = 1] \approx 0.0002 + 0.0020$
  - …

c	0	1	...	15	$\boxed{16}$	17
$P[X \leq c]$	0.0002	0.0022	...	0.981	$\boxed{0.991}$	0.996

- Mit 16 Preisen, habe ich mit 99% W'keit genug!

Zusammenfassung

- Zufallsvariable (ZV): Funktionen, die gross geschrieben werden
- Wahrscheinlichkeitsverteilung: Werte von Jasskarten
- Kennzahlen: $E(X)$ und $Var(X)$
- Binomialverteilung: W'keit für x Gewinne bei n Losen

Hausaufgaben

- Skript: Kapitel 2.4 – 2.6 lessen
- Serie 3 lösen
- Quiz 3 bearbeiten
- etutoR 2 anschauen