Musterlösung zu Serie 5

1. (Diese war eine Prüfungsaufgabe im Herbssemester 2011.) Das Pharmaunternehmen Life Co. hat ein neues Medikament zur Bekämpfung von ADHS entwickelt. Um die Wirksamkeit festzustellen wurde das Medikament mit $n = 10$ Patienten getestet. Die derzeitige Standardmethode zeigt bei 30% der behandelten Patienten eine Wirkung.

a) Angenommen das neue Medikament ist genauso wirksam wie die Standardmethode, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Behandlung bei genau 2 Patienten eine Wirkung zeigt? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie bei höchstens 2 Patienten eine Wirkung zeigt?

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.3^2 0.7^8 = 0.23$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.7^{10} + \binom{10}{1} 0.3^1 0.7^9 + \binom{10}{2} 0.3^2 0.7^8 = 0.38$$

b) Die Behandlung mit dem neuen Medikament war bei 4 Patienten erfolgreich. Führen Sie einen einseitigen Hypothesentest durch um festzustellen ob das neue Medikament wirksamer ist als die Standardmethode (bei einem Signifikanzniveau von 5%). Geben Sie explizit alle Schritte an.

1. Modell: X ist die Anzahl erfolgreich behandelter Patienten, $X \sim \text{Bin}(10, \pi)$.
2. Die Nullhypothese ist $H_0 : \pi = 0.3$, die Alternative ist $H_A : \pi > 0.3$.
3. Die Teststatistik ist X: $P(X = x|H_0) = \binom{10}{x} 0.3^x 0.7^{10-x}$.
4. Das Signifikanzniveau ist $\alpha = 0.05$.
5. Verwerfungsbereich:

	$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$	$x = 8$	$x = 9$	$x = 10$
$P(X \geq x)$	0.1503	0.0473	0.0106	0.0016	0.0001	5.9×10^{-6}

   Daher ist der Verwerfungsbereich $K = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.
6. Testentscheid: Da $4 \notin K$ wird H_0 nicht verworfen. Eine erhöhte Wirksamkeit des neuen Medikaments kann nicht nachgewiesen werden.

c) Wie ist die *Macht* eines Hypothesentests definiert? Geben Sie die Macht an für den Test $H_0 : \pi = 0.3$ vs. $H_A : \pi = 0.6$ (π ist die Wirksamkeit).
Die Macht eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese verworfen wird, wenn die Alternative stimmt: $P(X \in K|H_A)$. (Alternativ: $\text{Macht} = 1 - P(\text{Fehler 2. Art}) = 1 - P(X \notin K|H_A)$)
Im konkreten Fall:

$$\text{Macht} = \binom{10}{6} 0.6^6 0.4^4 + \binom{10}{7} 0.6^7 0.4^3 + \binom{10}{8} 0.6^8 0.4^2 + \binom{10}{9} 0.6^9 0.4 + 0.6^1 0 = 0.6331$$

2.
1. **Modell:** X: Anzahl defekter Reagenzgläser in einer Stichprobe aus 50 Reagenzgläsern. $X \sim Bin(50, \pi)$.
2. **Nullhypothese:** $H_0 : \pi = 0.1$
   Alternative: $H_A : \pi < 0.1$
3. **Teststatistik:** T: Anzahl defekter Reagenzgläser in einer Stichprobe aus 50 Reagenzgläsern.
   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim Bin(50, 0.1)$
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich:** Falls H_0 stimmt, gilt:

$$\begin{array}{lcllcl} P(X=0) & = & 0.0052 & P(X \leq 0) & = & 0.0052 \\ P(X=1) & = & 0.0286 & P(X \leq 1) & = & 0.0338 \\ P(X=2) & = & 0.0779 & P(X \leq 2) & = & 0.1117 \end{array}$$

   Der Verwerfungsbereich K für ein Signifikanzniveau von 5% ist also gegeben durch $K = \{0, 1\}$.

6. **Testentscheid:** Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $t = 3$. Der beobachtete Wert der Teststatistik ($t = 3$) liegt nicht im Verwerfungsbereich der Teststatistik ($K = \{0, 1\}$). Die Nullhypothese kann daher auf dem 5% Signifikanzniveau nicht verworfen werden. Es kann also durchaus sein, dass der Anteil minderwertiger Gläser in der ganzen Lieferung 10% ist. Der Hersteller sollte also seine Lieferung nicht losschicken sondern genauer untersuchen.