Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kontinuierliche Zufallsvariablen

Statistik (Biol./Pharm./HST) – FS 14

Wa.verteilung bei kontinuierlichen Werten

- ZV X_0 uniform auf $W_0 = \{0,1,\ldots,9\} \rightarrow P(X_0 = x) = \frac{1}{10}$
- ZV X_1 uniform auf $W_1 = \{0.0,0.1,\ldots,9.9\} \rightarrow P(X_1 = x) = \frac{1}{100}$
- ZV X_2 uniform auf $W_2 = \{0.00,0.01,\ldots,9.99\} \rightarrow P(X_2 = x) = \frac{1}{1000}$

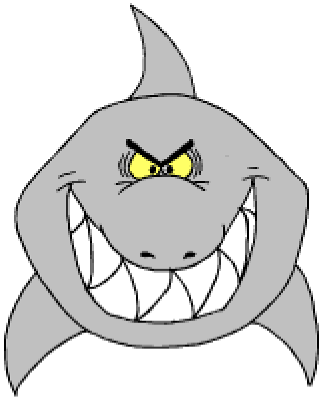
...

- ZV X_i uniform auf $W_i \rightarrow P(X_i = x) = \frac{1}{10^{i+1}}$
- ZV X_∞ uniform auf $W_\infty = [0,10] \rightarrow P(X_\infty = x) = 0$

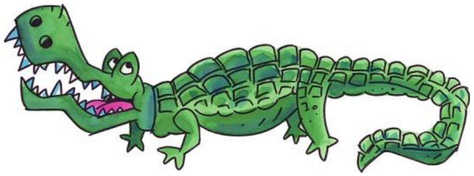
Wa. ist nutzlos
bei kontinuierlichen Zufallsvariablen !

Verteilungs-Zoo: Kontinuierliche Zufallsvariablen

Exponential



Uniform



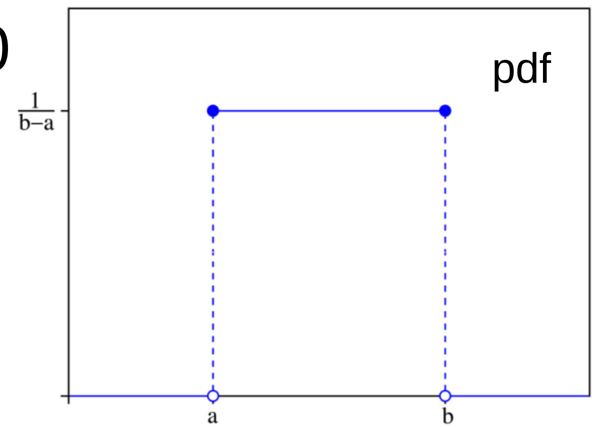
Zugpferd der Statistik

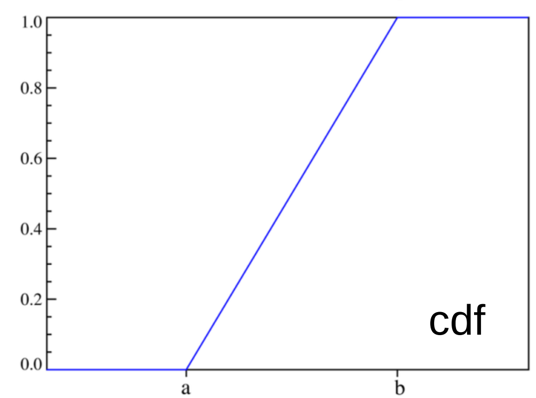
Normal

...

Uniforme Verteilung

- **Situation:** Jeder Wert im Intervall [a,b] ist gleich wa.
- ZV X: Ein Wert aus [a,b]
- $X \sim Unif(a,b)$
  "X ist uniform verteilt auf dem Intervall [a,b]"
- pdf: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ falls $a \leq x \leq b$, sonst 0
- cdf: $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{for } a \leq x < b \\ 1 & \text{for } x \geq b \end{cases}$$
- $E(X) = \frac{b+a}{2}$; $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$





Beispiel: Haltestelle

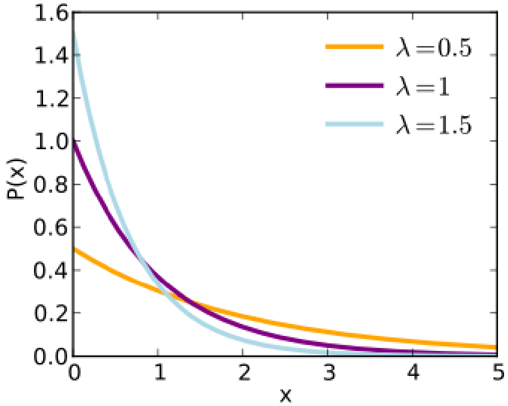
- In Zürich fahren die Trams alle 7 Minuten. Angenommen, Sie kommen zu einer zufälligen Zeit an eine Haltestelle, an der ein Tram fährt. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie höchstens eine Minute warten müssen?
- X: Wartezeit in Minuten

$$X \sim Unif(0,7)$$

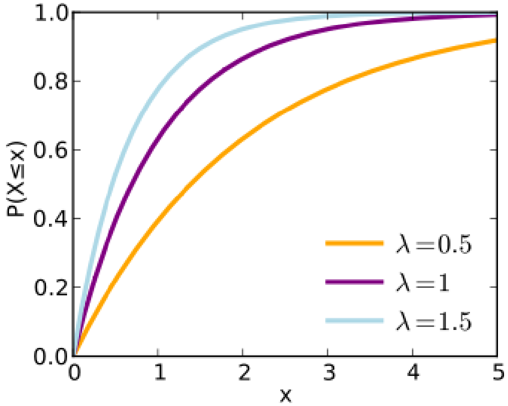
- $P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1-0}{7-0} = \frac{1}{7}$

Exponentialverteilung

- **Situation:** Wartezeit “ohne Gedächtnis”
- ZV X: Ein Wert aus $[0, \infty[$
- $X \sim Exp(\lambda)$
  ‘X ist exponentialverteilt mit Parameter λ’
- pdf: $$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- cdf: $$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}, Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$



pdf



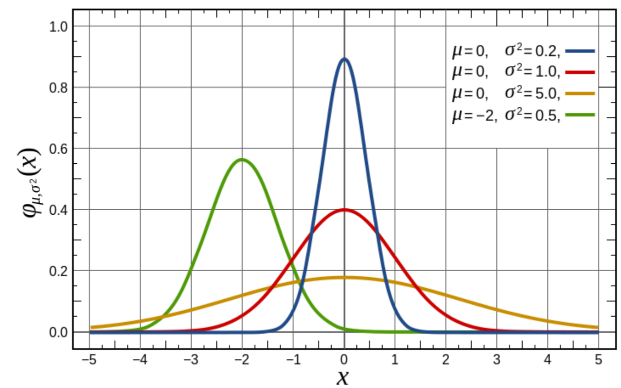
cdf

Exponentialverteilung: Kein Gedächtnis

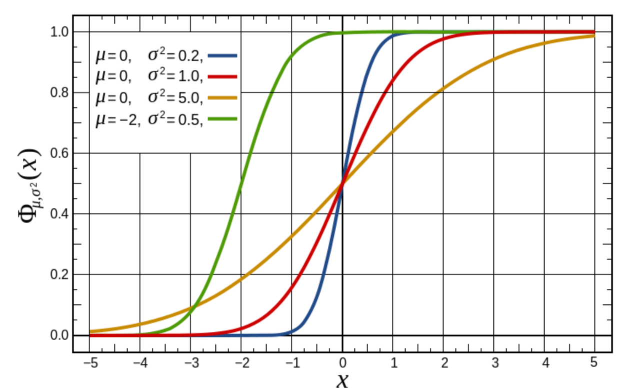
- $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}$
- $P(T > t + s | T > s) = \frac{P(T>t+s \; und \; T>s)}{P(T>s)} = \frac{P(T>t+s)}{P(T>s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} =$
  $= e^{-\lambda t} = P(T > t)$
  "Es spielt keine Rolle, ob man schon s Sekunden gewartet hat"
- Gut für: Radioaktiver Zerfall, manche Ionenkanäle
- Schlecht für: Lebenszeit bei Menschen, Wartezeit im Supermarkt

Normalverteilung

- **Situation:** Beliebige kontinuierliche Werte; meist um einen Wert konzentriert; starke Ausreisser selten
- ZV X: Ein Wert aus $]-\infty;\infty[$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  'X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2'
- pdf: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
- cdf: ???
  (Standardisieren und Tabelle oder numerisch integrieren)
- $E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$
- Summe von N's ist wieder N



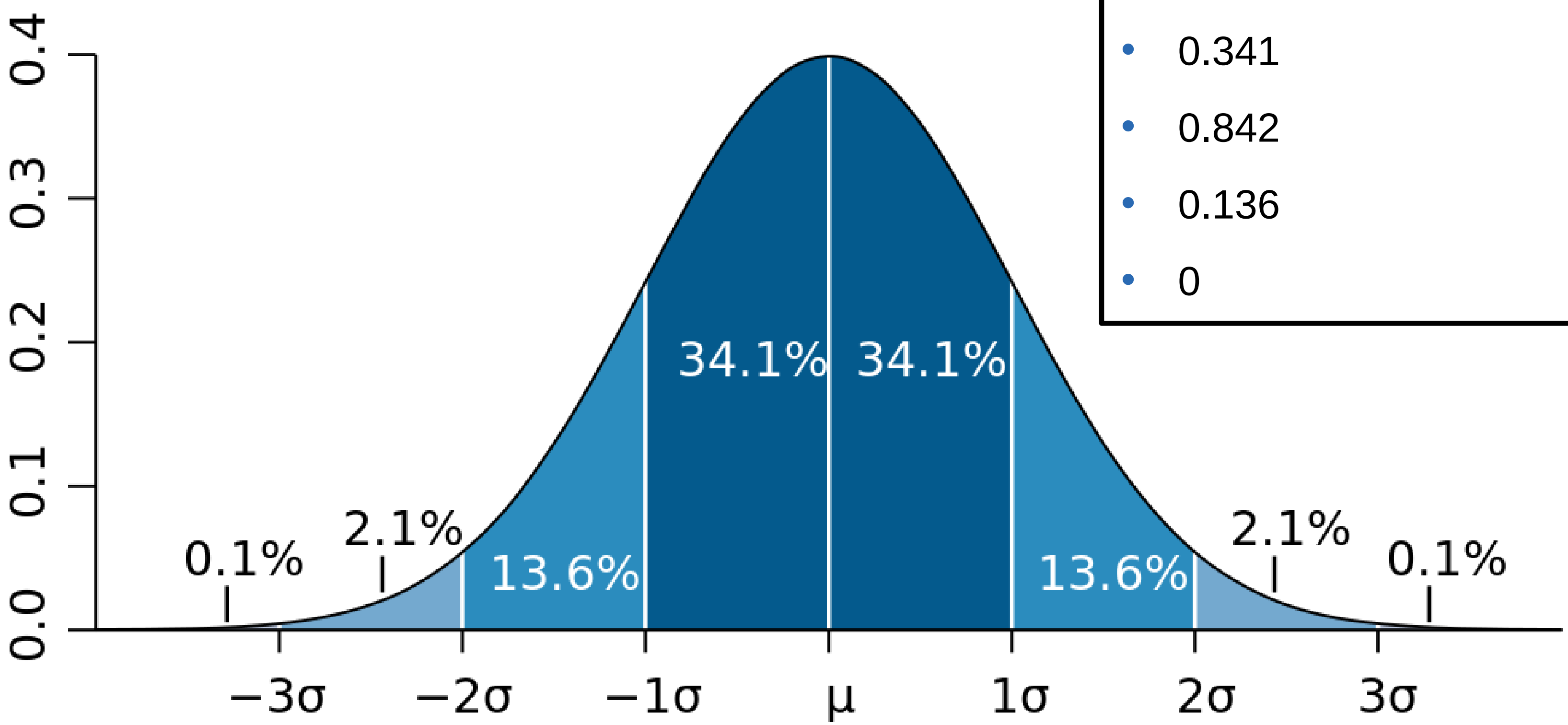
pdf



cdf

Normalverteilung: Messfehler

- Messfehler werden meist mit der Normalverteilung modelliert
(Begründung: Zentraler Grenzwertsatz, siehe später)



Wie gross ist $P(X = \mu + 1\sigma)$?

- 0.341
- 0.842
- 0.136
- 0

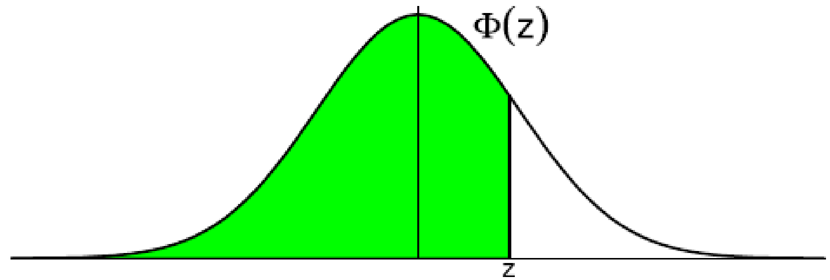
Standardnormalverteilung Z

- $Z \sim N(0,1)$
- Pdf mit φ bezeichnet: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
- Cdf mit Φ bezeichnet: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) dy$

  Analytisch nicht lösbar, daher tabelliert
- Bsp: 95%-Quantil

  $$P(Z < 1.64) = \Phi(1.64) = 0.9465$$

  Das 95%-Quantil der Standardnormalverteilung ist also etwa 1.64.



$$\text{Bsp.: } \mathrm{P}\left[Z \leq 1.96\right] = 0.975$$

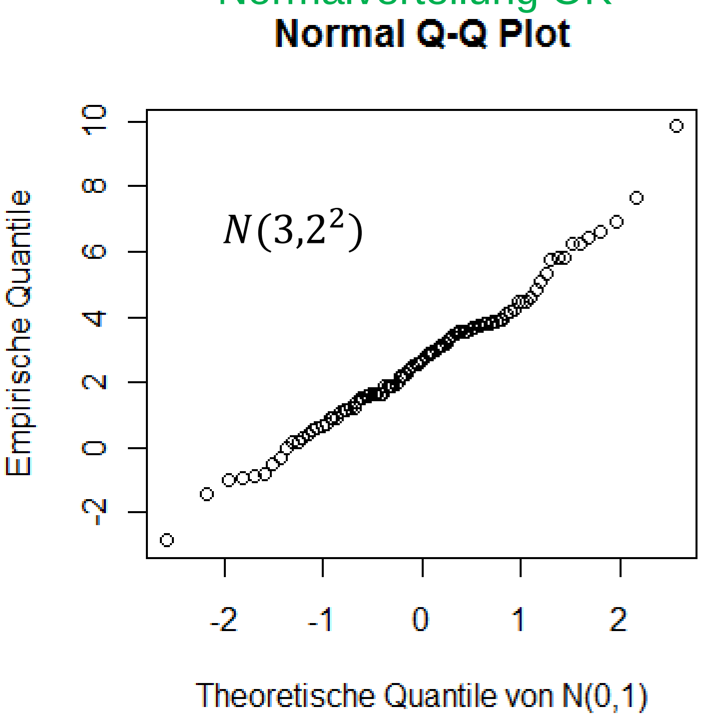
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Wie prüft man, ob eine Normalverteilung vorliegt?

- Histogramm der Daten mit pdf vergleichen
  Schwierig kleine Abweichungen zu erkennen
- Einfacher: QQ-Plot – Theoretische Quantile gegen Empirische Quantile

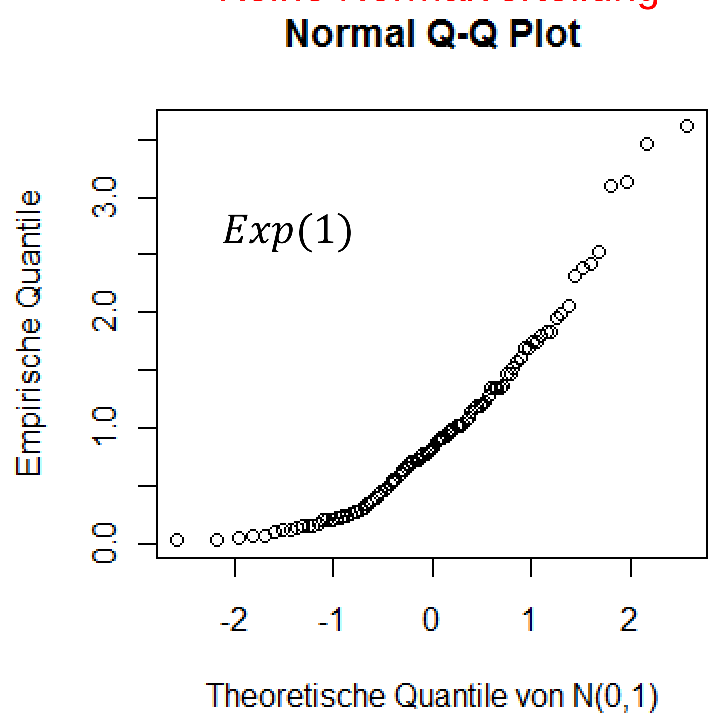
Gerade:

Normalverteilung OK



Krümmung:

Keine Normalverteilung



Funktion einer Zufallsvariable

- Bsp: Zeit von einem Projekt: $X \sim N(0,1)$;
  Kosten vom Projekt: $Y = g(X) = 5 + 2 * X$;
  Wie ist Y verteilt ? Keine allgemeine Antwort !
  (Spezialfall: Normalverteilung)

- Falls $g(X) = a + bX$, gilt für alle Verteilungen:
  - $E(Y) = a + b * E(X)$
  - $Var(Y) = b^2 * Var(X)$
  - Quantil: $q_Y^\alpha = a + b * q_X^\alpha$

- Zum Bsp von oben:
  - $E(Y) = 5 + 2 * 0 = 5$
  - $Var(Y) = 2^2 * 1 = 4$
  - $q_Y^{0.95} = 5 + 2 * 1.64 = 8.28$

Spezialfall: Normalverteilung

- $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, und $Y = a + b * X$, dann gilt $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ mit $\mu_y = a + b * \mu_x$ und $\sigma_y^2 = b^2 \sigma_x^2$
- Standardisieren: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} * X = a + b * X$$

$$\rightarrow E(Z) = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} * \mu = 0$$

$$\rightarrow Var(Z) = \frac{1}{\sigma^2} * \sigma^2 = 1$$

$\rightarrow Z \sim N(0,1)$ (tabelliert)

- Bsp: $X \sim N(2, 2^2)$; Wie gross ist $P(X \leq 5)$?

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{5 - \mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leq \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \Phi(1.5) = 0.93$$

Gesetz der grossen Zahlen (GGZ)

- Ann: $X_1, \dots, X_n \sim F\ iid; \quad E(X_i) = \mu,\ \ Var(X_i) = \sigma_X^2$

- ***Gesetz der grossen Zahlen:***

$$E\left(\overline{X}_n\right) = \mu$$
$$\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Wurzel-n-Gesetz: "Für doppelte Genauigkeit braucht man viermal so viele Daten."

Zentraler Grenzwertsatz (ZGS)

- Ann: $X_1, \ldots, X_n \sim F$ iid; $\quad E(X_i) = \mu, \;\; Var(X_i) = \sigma_X^2$

neu

$$\overline{X}_n \approx N(\underbrace{\mu, \frac{\sigma_X^2}{n}}_{\text{aus GGZ}})$$

oder äquivalent mit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$:

$$S_n \approx N(n\mu, n\sigma_X^2)$$

ZV: Gewinn X	P(X=x)
-10	1/6
0	1/2
6	1/3

ZGS: Beispiel

- n=1000 Spiele
- $E(X_i) = \frac{1}{3};\ \ Var(X_i) = 28.6$
- ZGS: Totaler Gewinn

$$S_n \sim N\left(1000 * \frac{1}{3}, 1000 * 28.6\right) = N(333, 28600)$$

- Mit 95% Wahrscheinlichkeit ist der totale Gewinn im Intervall

$$333 \pm 2 * \sqrt{28600} \to [-5; 671]$$

ZGS: Normalapproximation des Binomialtests

1. Modell: n Lose ziehen, gleiche Gewinnwa., unabhängig
   Jedes Los X_i: 1 mit Wa. π, 0 mit Wa. $1-\pi$
   $$E(\mathrm{X_i}) = \pi, Var(X_i) = \pi(1-\pi)$$
   X: Anzahl Gewinne; $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
2. $H_0: \pi = \pi_0; z.B.\ H_A: \pi < \pi_0$
3. Teststatistik T=X
   ZGS: $T \sim N(n\pi_0, n\pi_0(1-\pi_0))$
4. $\alpha = 0.05$
5. Verwerfungsbereich: $K = [0, c]$
   Finde c, sodass $P(T \leq c) = 0.05$ (mit Computer oder:)
   Standardisieren & Tabelle: $P(T \leq c) = P(Z \leq \tilde{c}) = 0.05$
   mit $\tilde{c} = \frac{c - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}}$;
   aus Tabelle: $\tilde{c} = -1.64$
   nach c auflösen: $c = n\pi_0 - 1.64\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}$
6. Testentscheid