

# Gepaarter und ungepaarter t-Test

Statistik (Biol./Pharm./HST) – FS 2014



# Wdh: t-Test für eine Stichprobe

1. **Modell:**  $X_i$  ist eine kontinuierliche Messgröße;  
 $X_1, \dots, X_n \text{ iid } \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)$ ,  $\sigma_X$  wird durch  $\widehat{\sigma}_X$  geschätzt
2. **Nullhypothese:**  $H_0 : \mu = \mu_0$ ,  
**Alternative:**  $H_A : \mu \neq \mu_0$  (oder “<” oder “>”)
3. **Teststatistik:**

$$T = \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\widehat{\sigma}_{\bar{X}_n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\widehat{\sigma}_X} = \frac{\text{beobachtet} - \text{erwartet}}{\text{geschätzter Standardfehler}}.$$

Verteilung der Teststatistik unter  $H_0$ :  $T \sim t_{n-1}$

4. **Signifikanzniveau:**  $\alpha$
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**

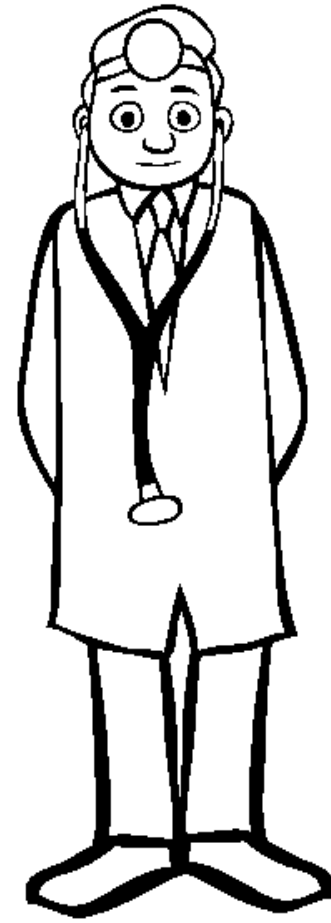
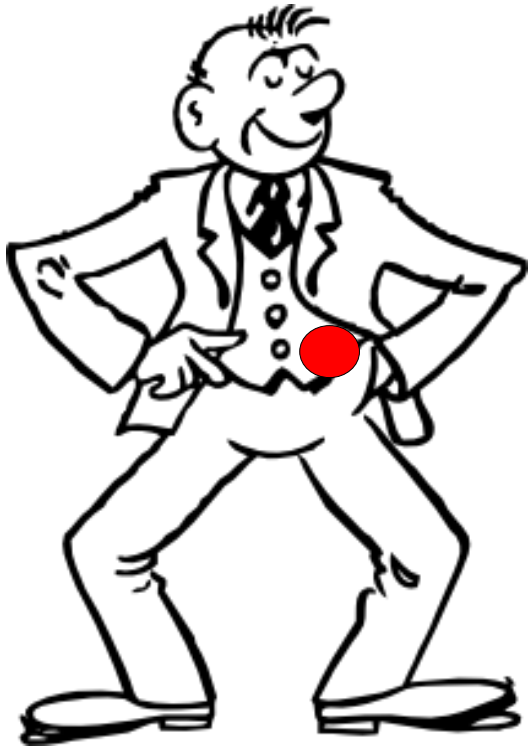
$$K = (-\infty, -t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \text{ bei } H_A : \mu \neq \mu_0,$$

$$K = (-\infty, -t_{n-1; 1-\alpha}] \text{ bei } H_A : \mu < \mu_0,$$

$$K = [t_{n-1; 1-\alpha}, \infty) \text{ bei } H_A : \mu > \mu_0.$$

6. **Testentscheid:** Überprüfe, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt.

Mr. X



Krebs

# Zwei Krebstypen

1

Typ 1: Mild

**Chemotherapie** nicht nötig

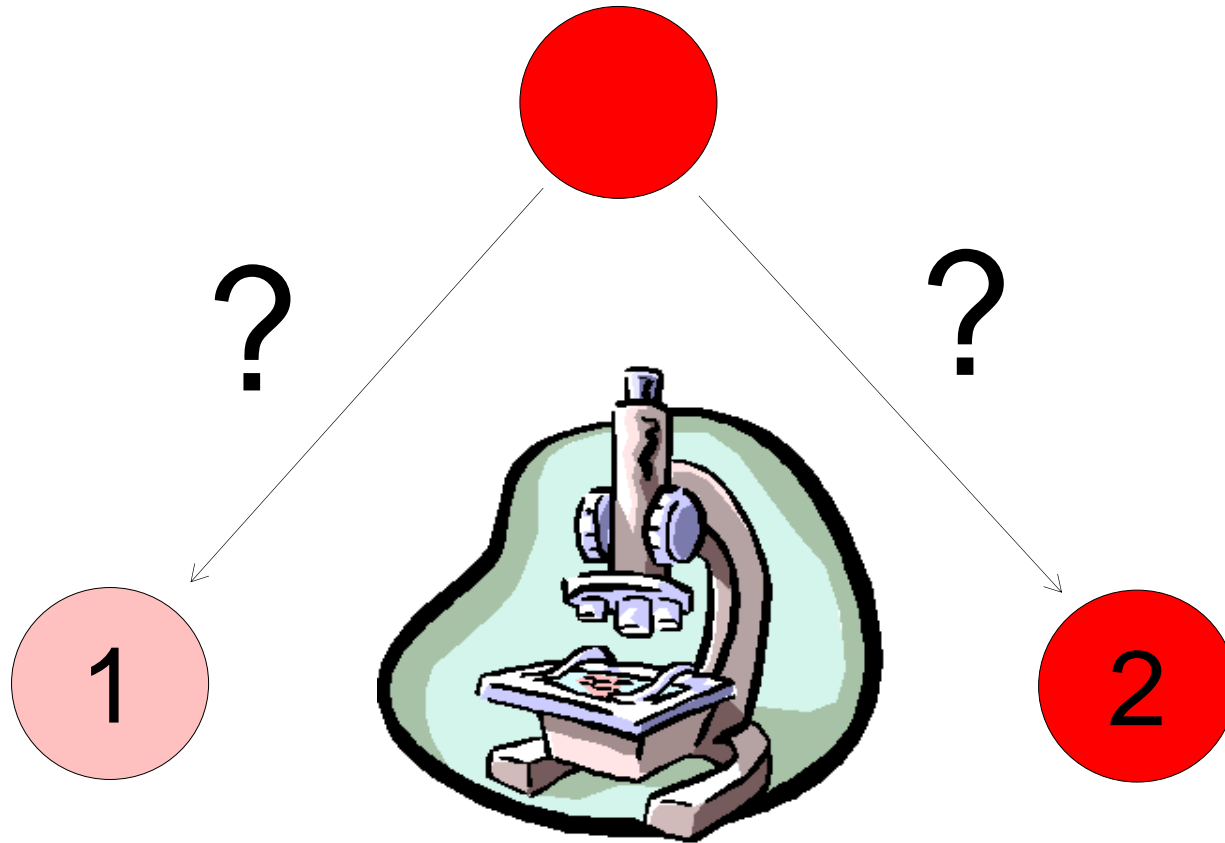
2

Typ 2: **Schwer**

**Chemotherapie** **nötig**

**Problem:**

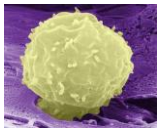
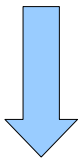
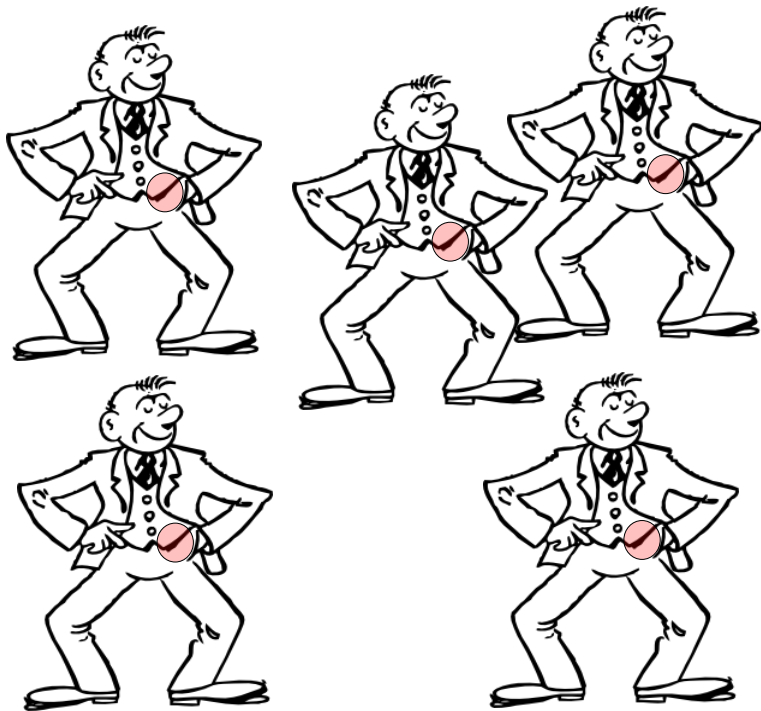
**Typ erst nach langer Zeit erkennbar**



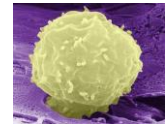
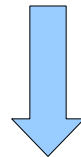
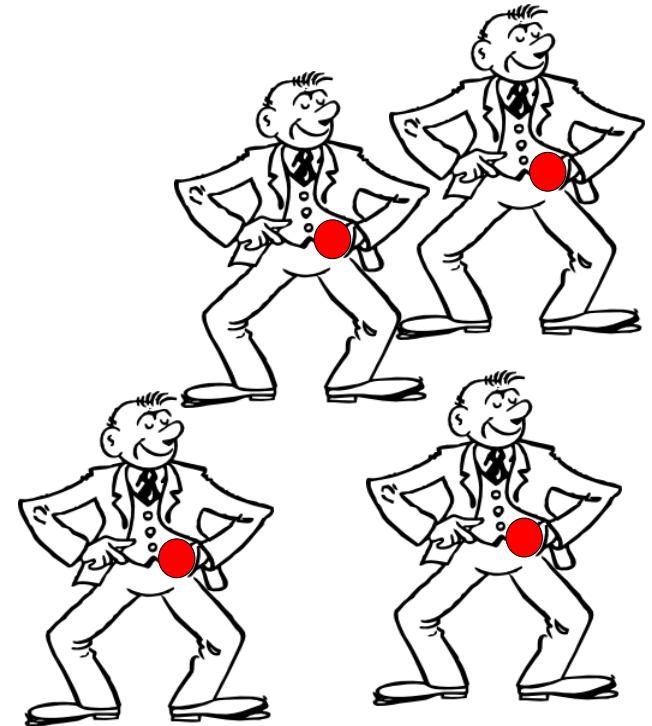
Jetzt **Chemotherapie** oder nicht?

Wie kann man  
verschiedene Arten von Krebs  
frühzeitig  
unterscheiden?

# Typ 1



# Typ 2



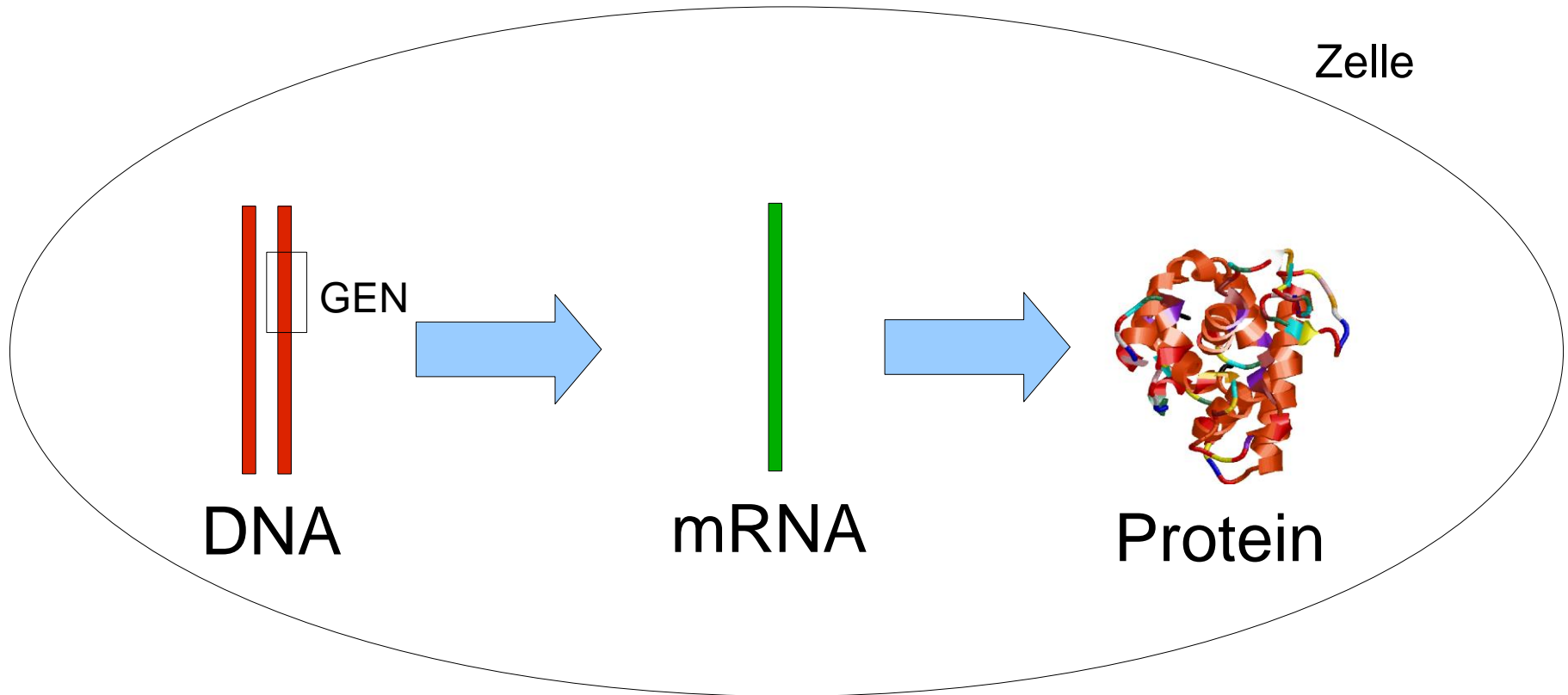
## Vergleiche Krebszellen

Idee:

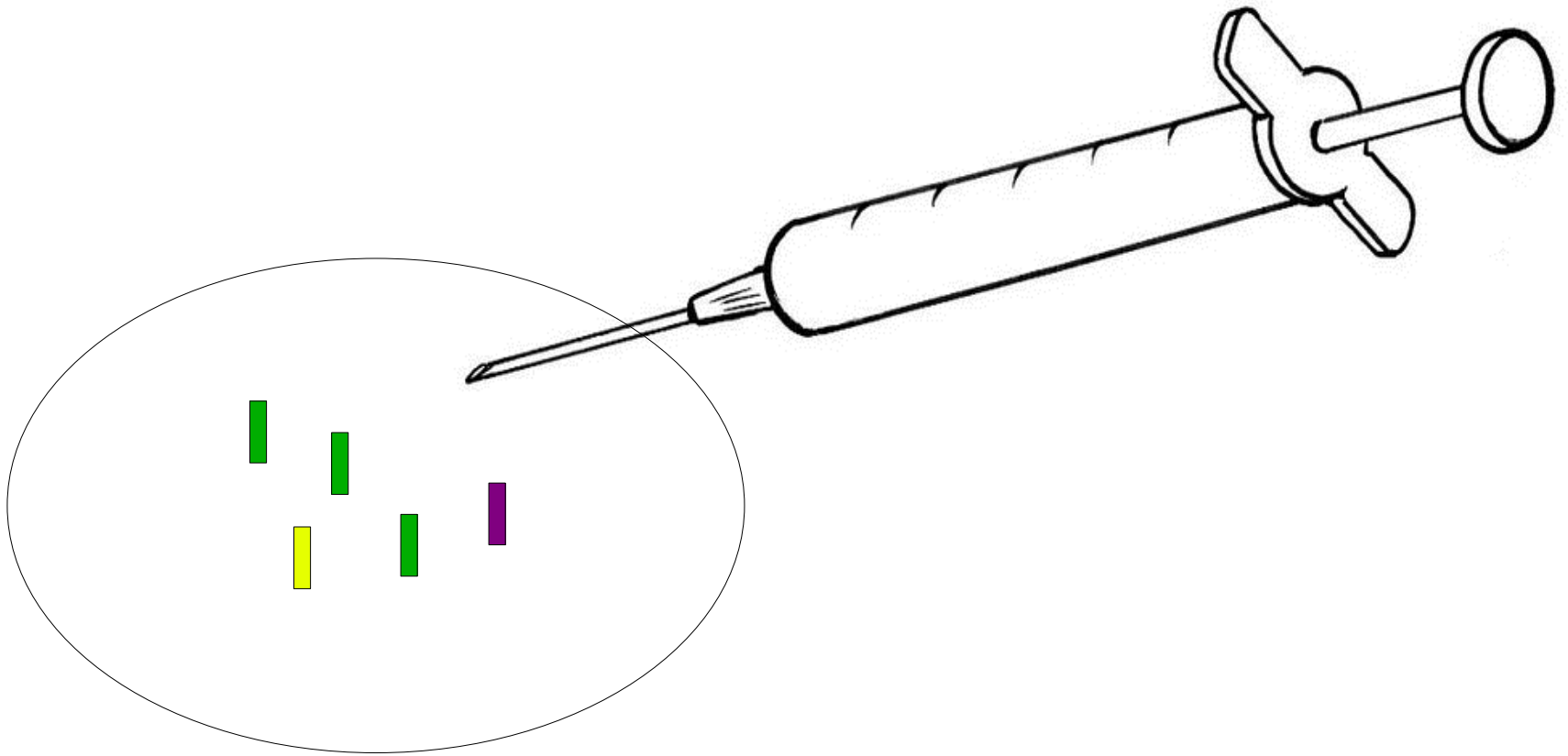
Vergleiche Aktivität  
innerhalb der Zelle



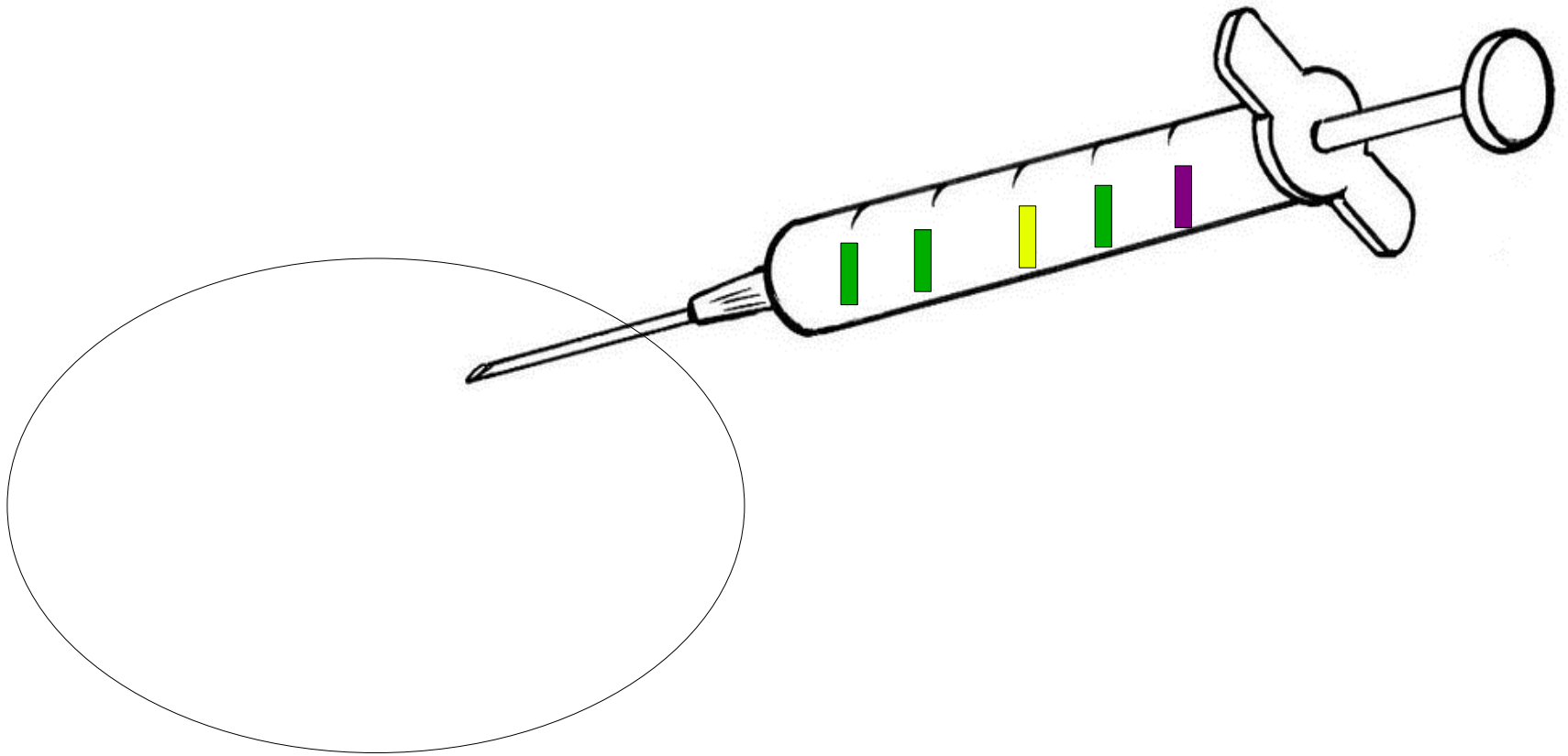
# Zentrales Dogma der Molekularbiologie



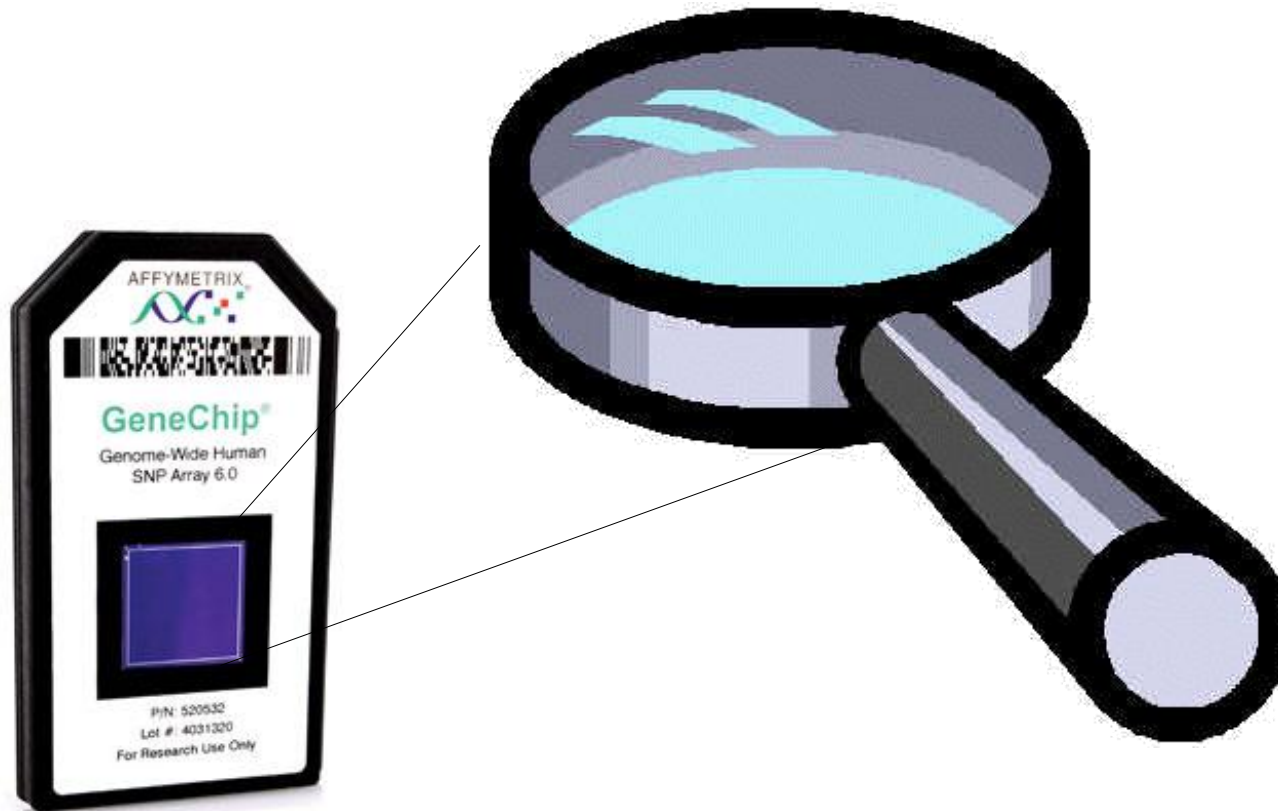
# Entnahme mRNA



# Entnahme mRNA

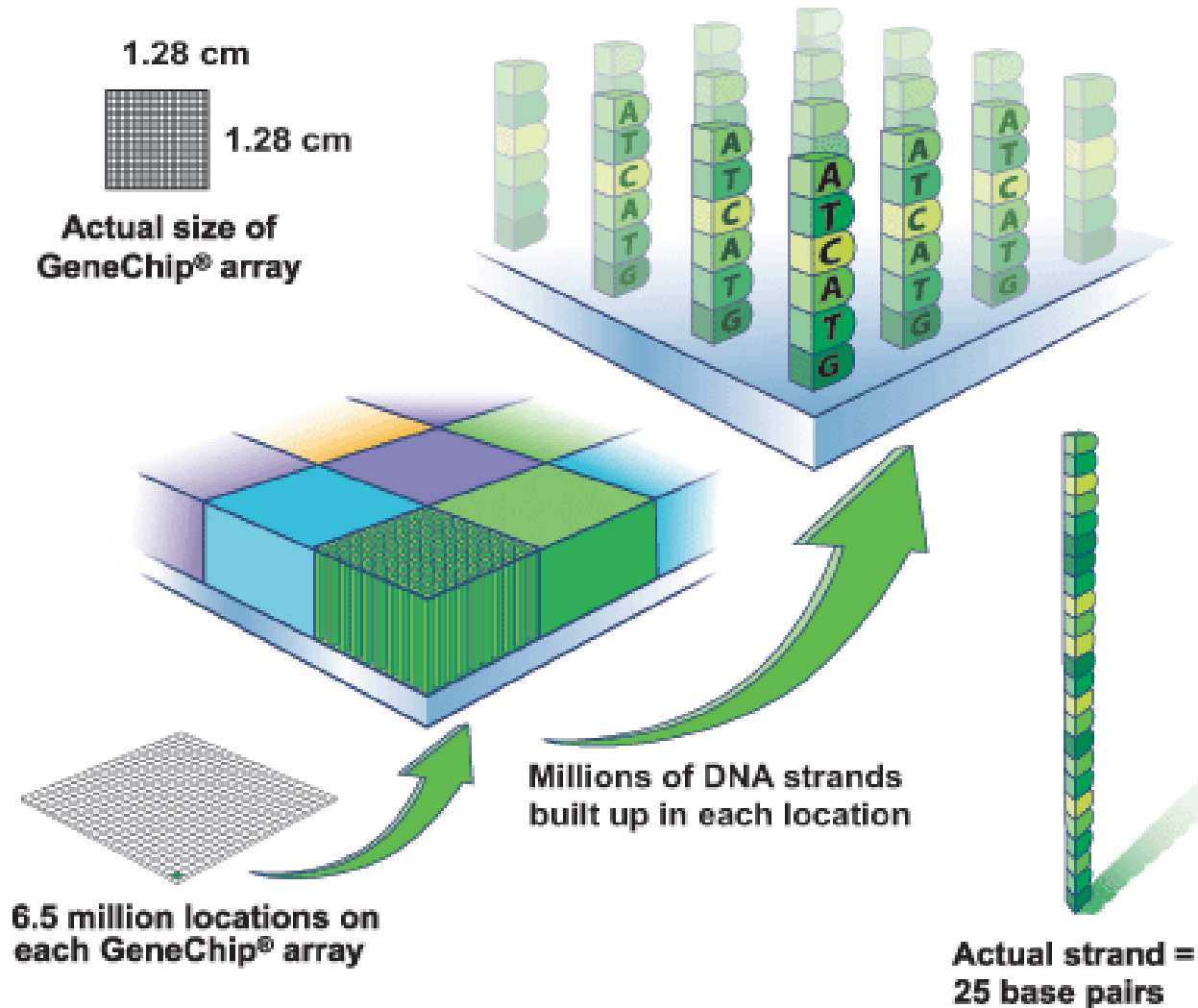


# Nehme einen Microarray

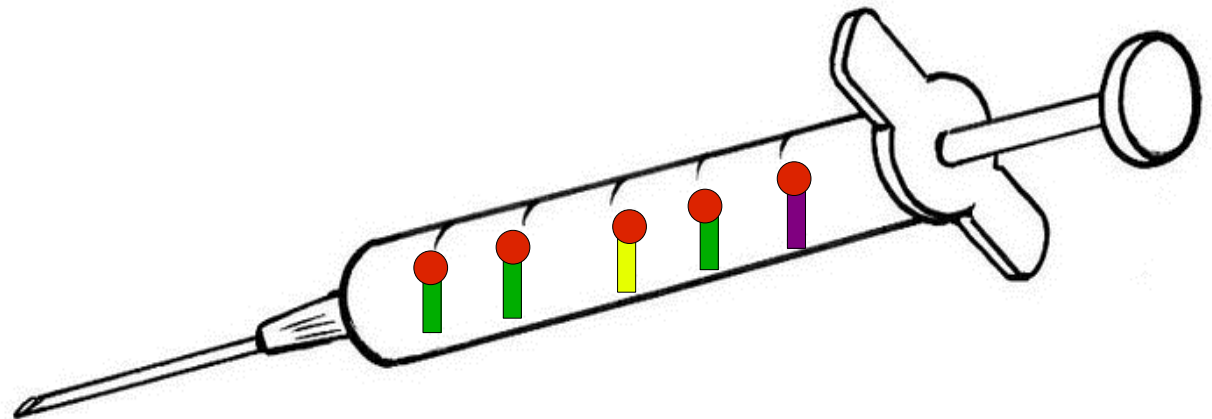
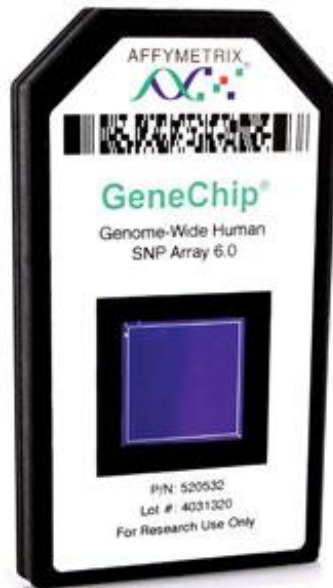


# Microarray: Zoom In

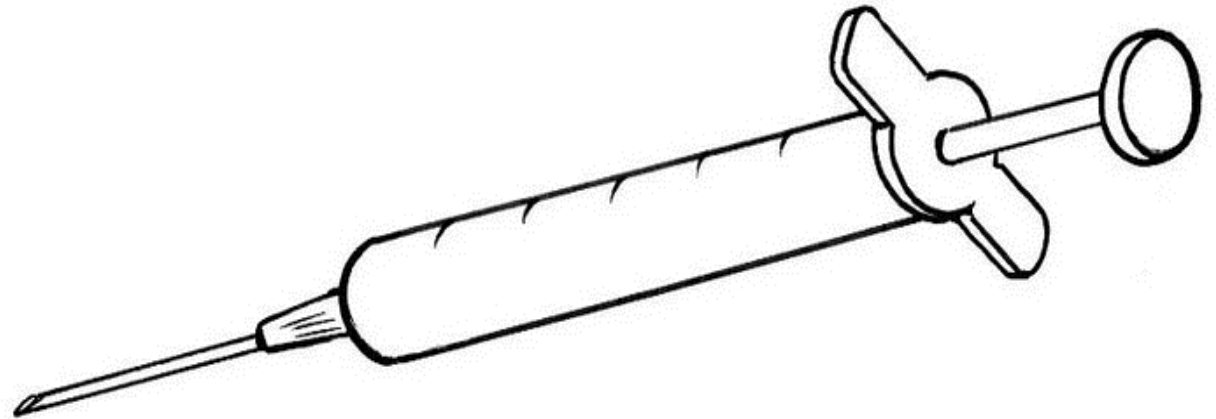
From Computer Desktop Encyclopedia  
Reproduced with permission.  
© 2007 Affymetrix



# mRNA auf Microarray



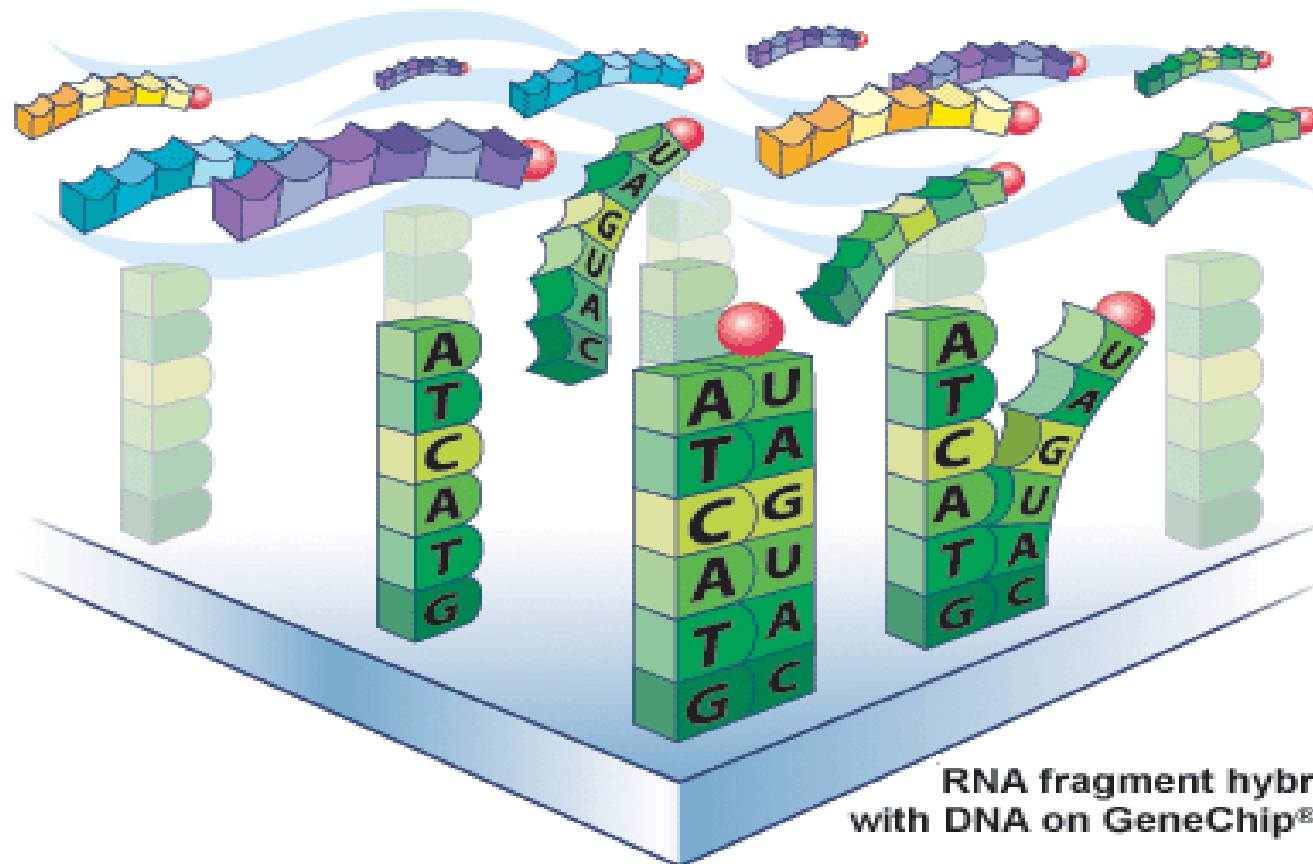
# mRNA auf Microarray



# Auf dem Microarray

From Computer Desktop Encyclopedia  
Reproduced with permission.  
© 2007 Affymetrix

RNA fragments with fluorescent tags from sample to be tested

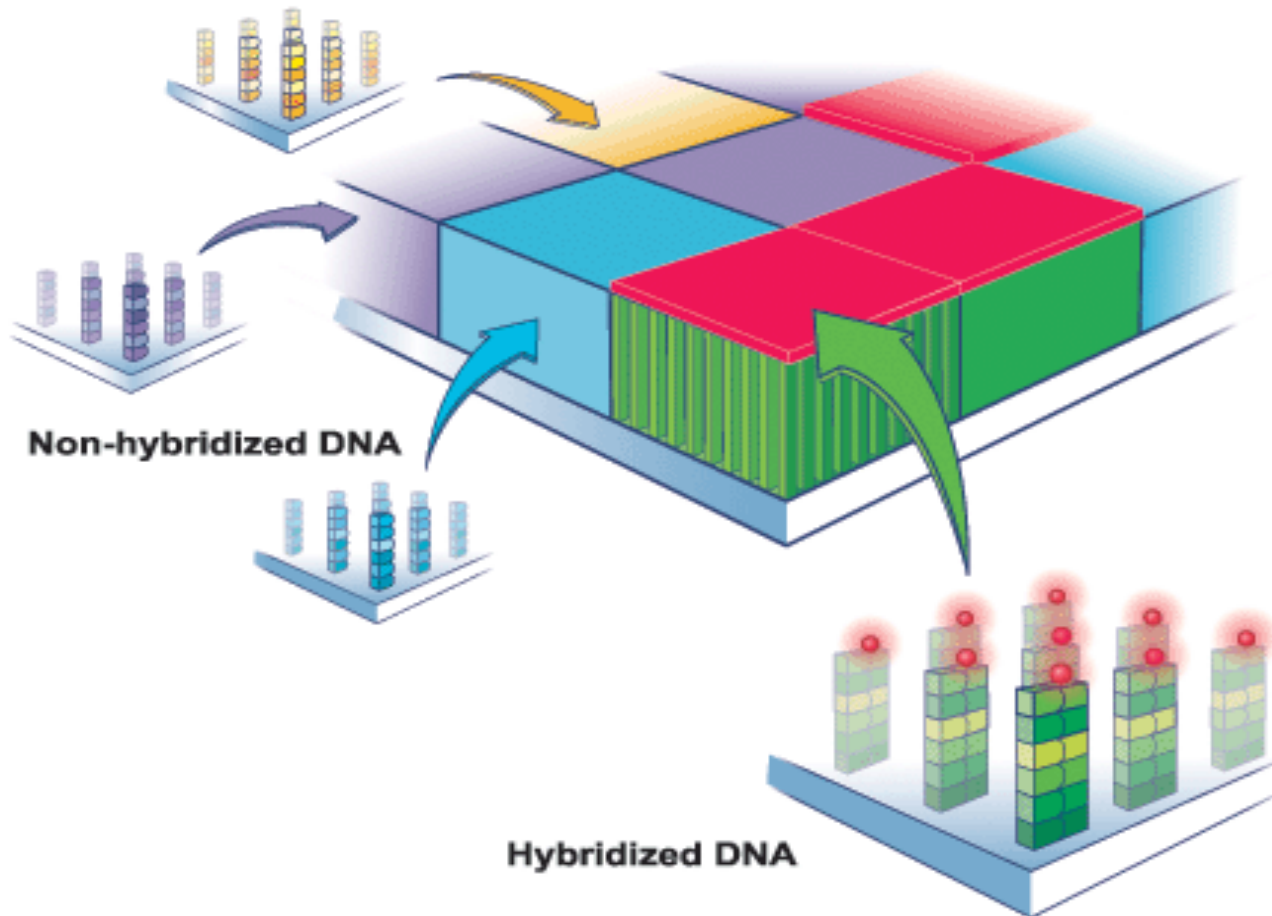




# Voila: Ein Feuerwerk!

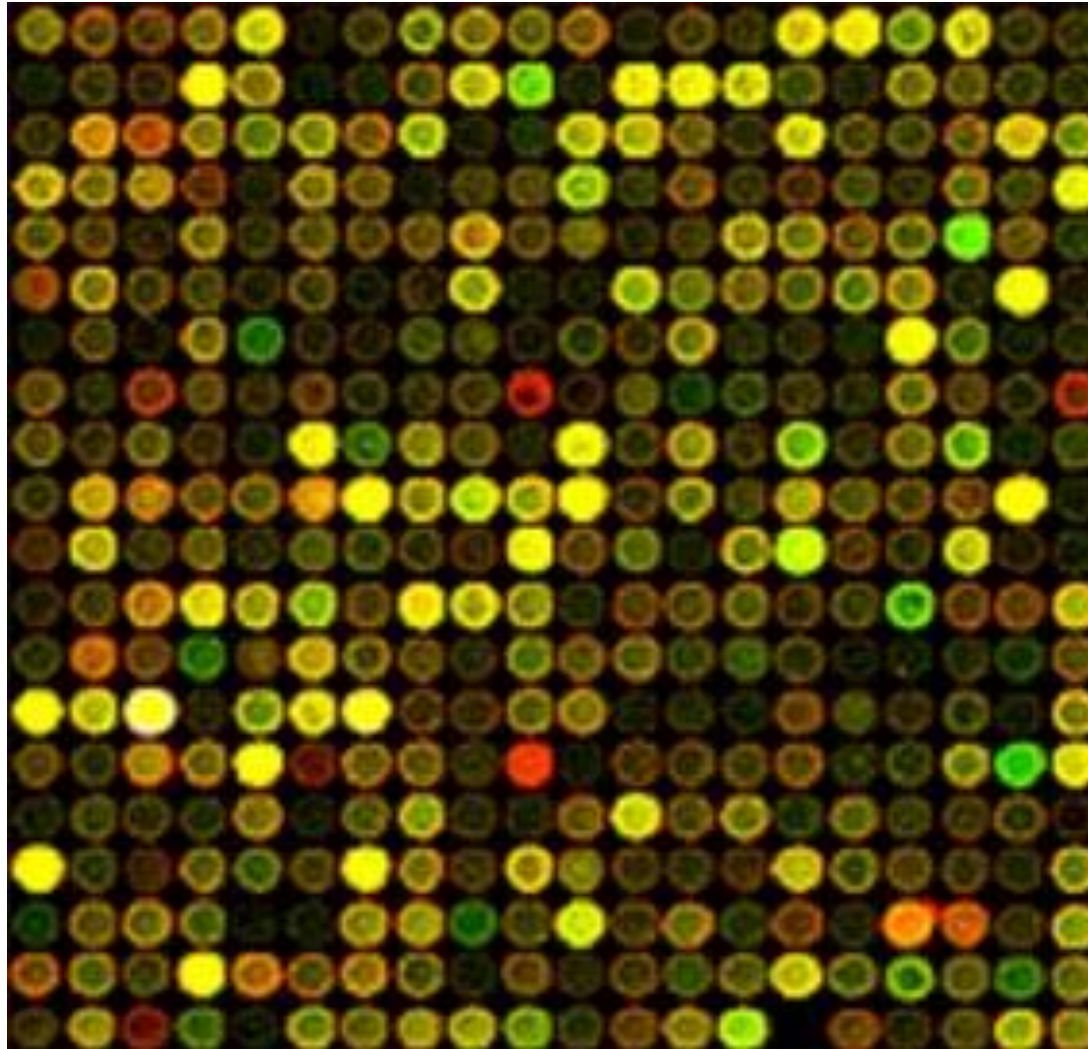
From Computer Desktop Encyclopedia  
Reproduced with permission.  
© 2007 Affymetrix

Shining a laser light at GeneChip® array causes tagged DNA fragments that hybridized to glow



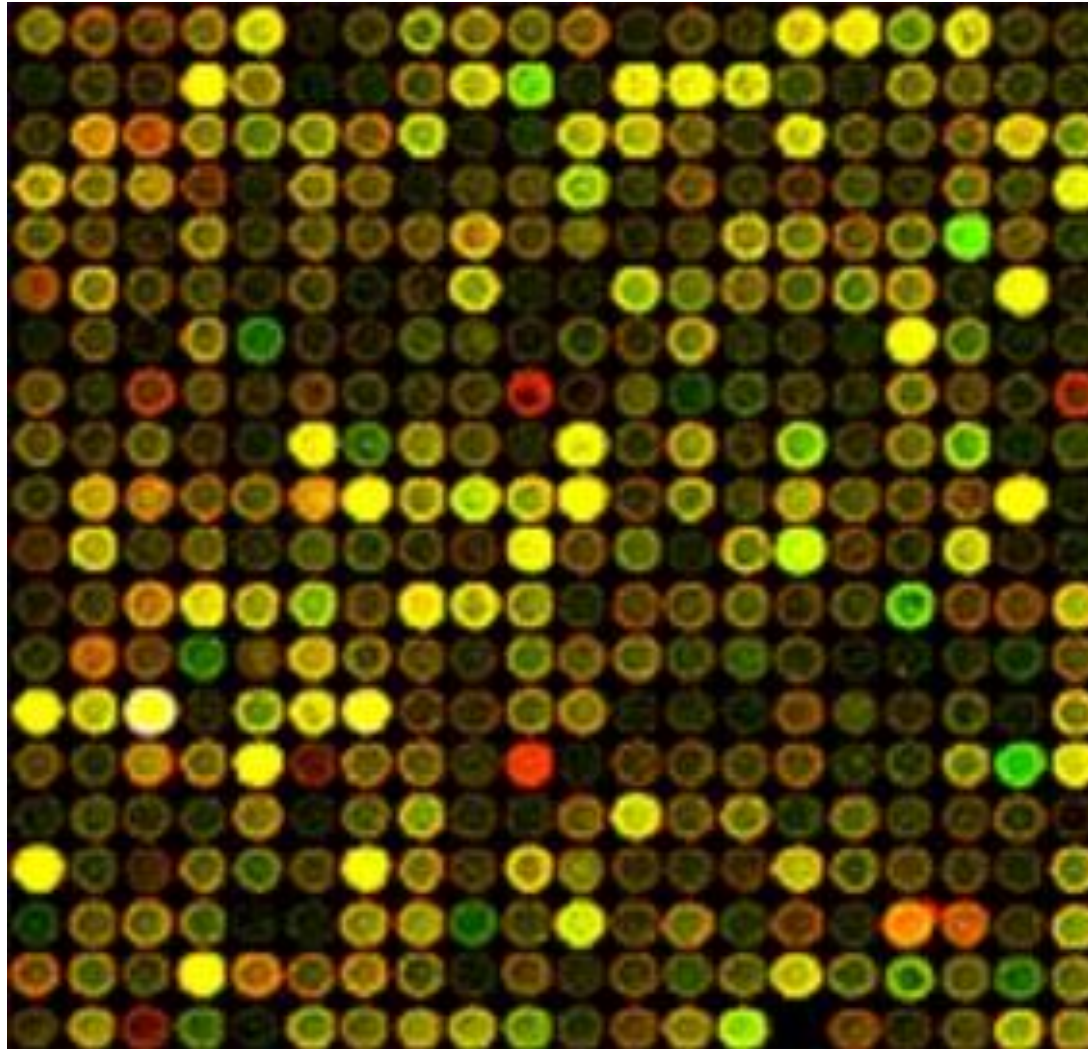
# Helligkeit = Aktivität des Gens

Gen 5 sehr aktiv



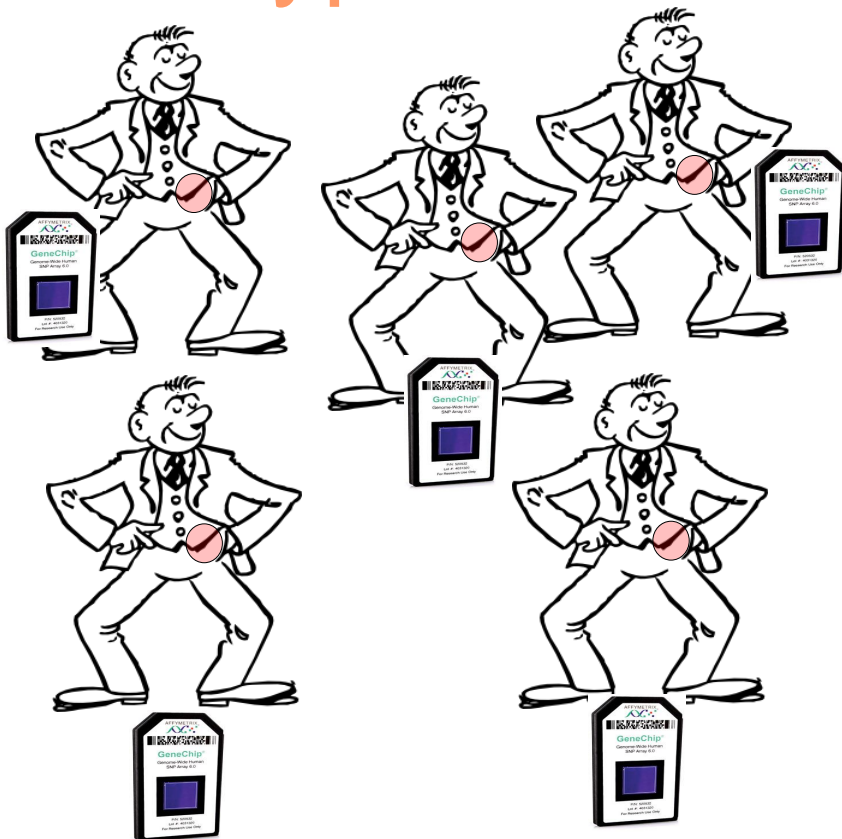
# Helligkeit = Aktivität des Gens

Gen 6 nicht aktiv

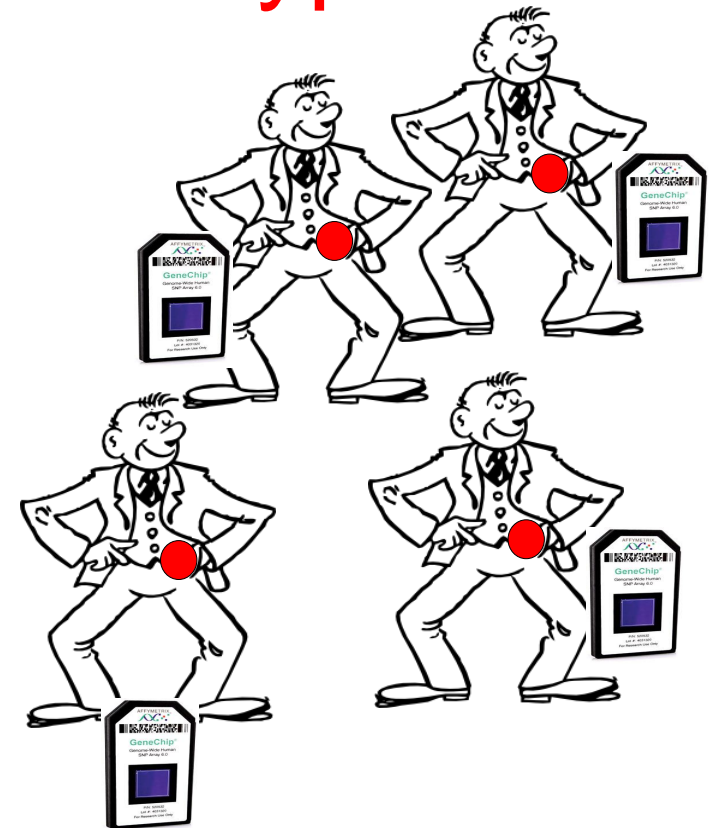


# Für jeden Patienten ein Microarray

Typ 1



Typ 2



# Microarray: Aktivität aller Gene in der Zelle

Typ 1

Typ 2

Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5
1	2.1	1.3	1.9	1.2	1.4
2	2.4	2.3	2.5	2.1	2.0
...					
50000					

Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4
1	1.9	2.5	2.4	2.9
2	2.3	2.2	2.4	2.1
...				
50000				

# Microarray: Aktivität aller Gene in der Zelle

Typ 1

Typ 2

Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5
1	2.1	1.3	1.9	1.2	1.4
2	2.4	2.3	2.5	2.1	2.0
...					
50000					

Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4
1	1.9	2.5	2.4	2.9
2	2.3	2.2	2.4	2.1
...				
50000				

# Microarray: Aktivität aller Gene in der Zelle

Typ 1

Typ 2

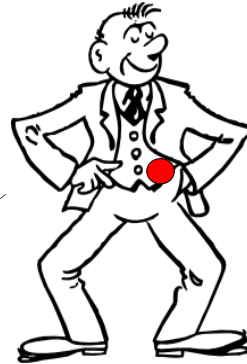
Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5
1	2.1	1.3	1.9	1.2	1.4
2	2.4	2.3	2.5	2.1	2.0
...					
50000					

Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4
1	1.9	2.5	2.4	2.9
2	2.3	2.2	2.4	2.1
...				
50000				

Ist Gen 1 bei **Typ 2-Tumorzellen**  
signifikant aktiver?

Falls ja: Gen 1 kann **Typ1-Tumor** und **Typ-2 Tumor**  
unterscheiden!

Falls ja:



Gen 1 nicht aktiv

Gen 1 aktiv

Typ 1

Typ 2

~~Chemotherapie~~

Chemotherapie



# Microarray: Aktivität aller Gene in der Zelle

Typ 1

Typ 2

Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5
1	2.1	1.3	1.9	1.2	1.4
2	2.4	2.3	2.5	2.1	2.0
...					
50000					

Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4
1	1.9	2.5	2.4	2.9
2	2.3	2.2	2.4	2.1
...				
50000				

Ist Gen 1 bei **Typ 2-Tumorzellen**  
signifikant aktiver?

Ungepaarter t-Test

# Ungepaarter t-Test: 1/3

## 1. Modell:

$$\begin{aligned} X_1, \dots, X_n & \text{ iid } \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2), \\ Y_1, \dots, Y_m & \text{ iid } \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2). \end{aligned}$$

## 2. Nullhypothese:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y.$$

## Alternative:

$$\begin{aligned} & H_A : \mu_X \neq \mu_Y \text{ (zweiseitig)} \\ \text{oder } & H_A : \mu_X > \mu_Y \text{ (einseitig)} \\ \text{oder } & H_A : \mu_X < \mu_Y \text{ (einseitig)} \end{aligned}$$

# Ungepaarter t-Test: 2/3

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

3. Teststatistik:

$$T = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{S_{pool} \sqrt{1/n + 1/m}}$$

wobei

$$\begin{aligned} S_{pool}^2 &= \frac{1}{n+m-2} \left( \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y}_m)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n+m-2} \left( (n-1) \hat{\sigma}_x^2 + (m-1) \hat{\sigma}_y^2 \right). \end{aligned}$$

Verteilung der Teststatistik unter  $H_0$ :  $T \sim t_{n+m-2}$ .

$$\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

# Ungepaarter t-Test: 3/3

4. **Signifikanzniveau:**  $\alpha$

5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**

$$\begin{array}{ll} (-\infty, -t_{n+m-2, 1-\alpha/2}] \cup [t_{n+m-2, 1-\alpha/2}, \infty) & \text{bei Alternative } H_A : \mu_X \neq \mu_Y, \\ [t_{n+m-2, 1-\alpha}, \infty) & \text{bei Alternative } H_A : \mu_X > \mu_Y, \\ (-\infty, -t_{n+m-2, 1-\alpha}] & \text{bei Alternative } H_A : \mu_X < \mu_Y. \end{array}$$

6. **Testentscheid:** Entscheide, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich der Teststatistik liegt.

# Microarray: Aktivität aller Gene in der Zelle

Typ 1

Typ 2

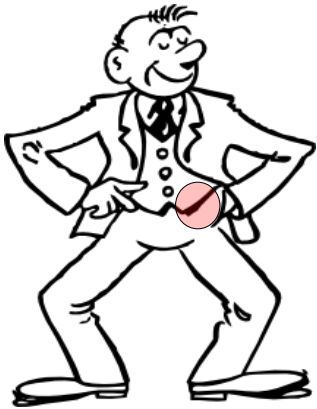
Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4	Pat. 5
1	2.1	1.3	1.9	1.2	1.4
2	2.4	2.3	2.5	2.1	2.0
...					
50000					

Gen	Pat. 1	Pat. 2	Pat. 3	Pat. 4
1	1.9	2.5	2.4	2.9
2	2.3	2.2	2.4	2.1
...				
50000				

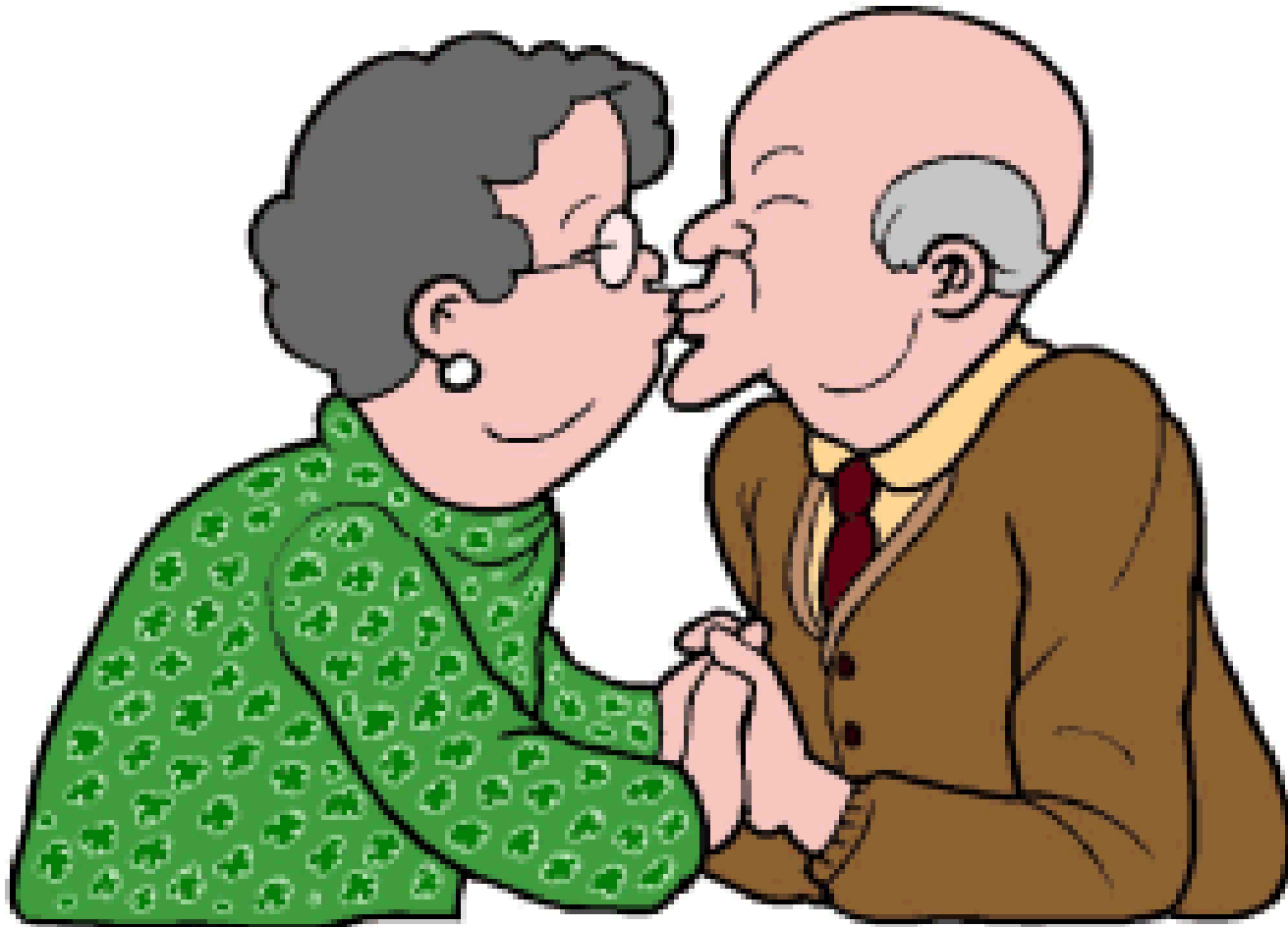
$$n = 5, \quad m = 4, \quad \bar{x} = 1.58, \quad \bar{y} = 2.43, \quad \hat{\sigma}_x = 0.40, \quad \hat{\sigma}_y = 0.41$$

Ungepaarter t-Test

# Happy End !

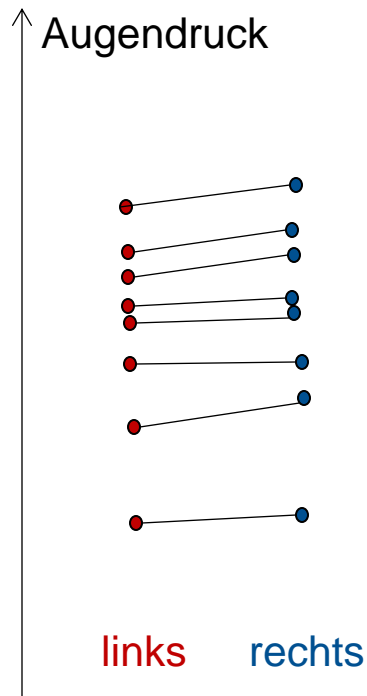


**Happy End !**



# Gepaart vs. Ungepaart

- Bsp: Augeninnendruck; ein Auge behandelt, das andere nicht (gepaarter Test ist angebracht)
- Gemäss Vorraussetzungen dürfte auch ein ungepaarter Test angewendet werden



Ungepaart:

Intuition Teststatistik:  $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\widehat{\sigma}_{\bar{X}}}$

Gepaart:

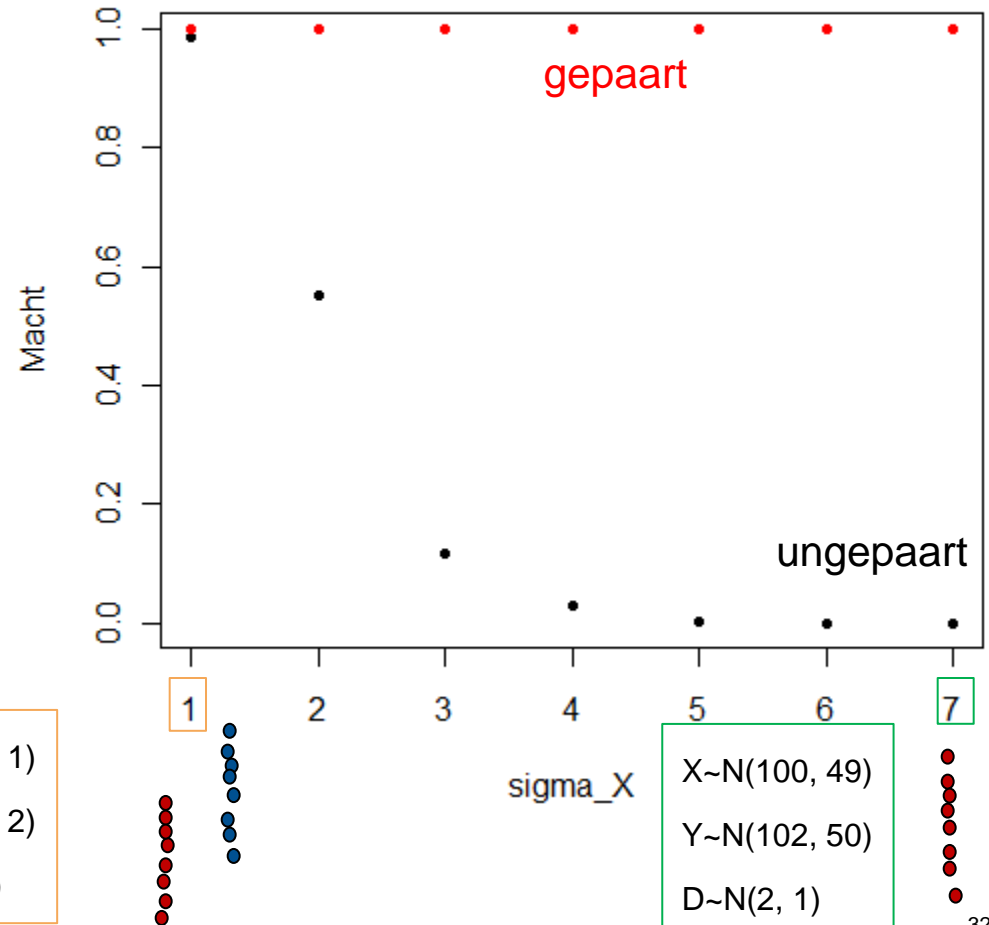
Differenz  $D_i = X_i - Y_i$

Teststatistik  $T = \frac{\bar{D}}{\widehat{\sigma}_{\bar{D}}}$



# Gepaart vs. Ungepaart: Simulationsstudie

- $H_0: \mu_D = 0$  bzw.  $H_0: \mu_X = \mu_Y$ ;  $n=m=10$
- $X \sim N(100, \sigma_X^2)$ ,  $D \sim N(2, 1)$ ,  $Y = X + D \sim N(102, 1 + \sigma_X^2)$   
gepaarte Situation
- Der **gepaarte t-Test** hat **mehr Macht**, wenn die Daten verrauscht sind.



## t-Test falls Varianz in Gruppen unterschiedlich (aka Welch-Test)

- Grundidee identisch
- Teststatistik und Verteilung falls  $H_0$  stimmt ist komplizierter
- Computer: Dieser Test ist meist der “default” t-Test
- Praxis: Man sollte immer annehmen, dass die Varianz der Gruppen unterschiedlich ist; d.h., Welch-Test verwenden
- Prüfung: Um einfacher rechnen zu können, werden wir beim t-Test gleiche Varianzen in den beiden Gruppen annehmen

# Mann-Whitney U-Test (aka Wilcoxon Rank-sum Test)

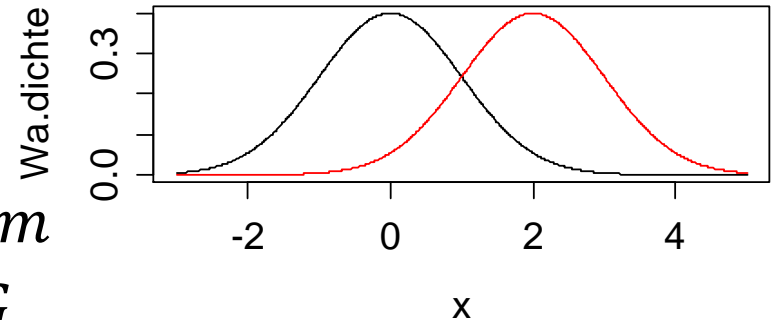
- Falls Daten nicht normalverteilt
- $X_i \sim F, i = 1, \dots, n; Y_j \sim G, j = 1, \dots, m$

$$H_0: F = G$$

$$H_A: F = G + \delta \ (\delta \neq 0) \text{ (oder einseitig)}$$

(d.h., Verteilungen sind verschoben, haben aber gleiche Form)

- Teststatistik:
  - Bilde Ränge über beide Gruppen hinweg
  - Falls Gruppen gleich gross sind, sollten Rangsummen etwa gleich sein
  - Falls Gruppen ungleich, sollten Rangsummen in einem gewissen Verhältnis stehen



# Bsp: Mann-Whitney U-Test

- Behandlung (B) und Kontrolle (K) je 2 Patienten
- Beobachtung: B: 1.2, 3.1; K: 5.9, 4.4
- Gesamtrang: B: 1, 2; K: 4, 3
- Rangsumme R in K: 4 + 3 = 7
- Falls  $H_0$  stimmt sind alle Ränge in K gleich wahrscheinlich

Ränge	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4
R	3	4	5	5	6	7

- Z.B. für einseitigen Test:

$$P(R \geq 7) = P(R = 7) = \frac{1}{6} \approx 0.167$$

P-Wert ←

- $H_0$  kann auf dem 5% Niveau nicht verworfen werden
- Praxis: Computer verwenden

# Übersicht: Tests für ungepaarte Stichproben

Test	Annahmen				$n_{min}$ (falls $n = m$ ) bei $\alpha = 0.05$	Macht für ein Beispiel (1)
	$\sigma_X = \sigma_Y$	$X_i \sim N$ $Y_i \sim N$	$F, G$ haben gleiche Form	iid pro Gruppe		
t ( $\sigma_X = \sigma_Y$ )	x	x	x	x	2	57 %
t ( $\sigma_X \neq \sigma_Y$ )		x		x	2	56 %
MW U-Test	x		x	x	4	53 %

(1):  $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2), Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2), n = m = 10; H_0: \mu_X = \mu_Y; H_A: \mu_X \neq \mu_Y; \alpha = 0.05$

Macht berechnet für konkrete Alternative:  $X_i \sim N(0,1), Y_i \sim N(1,1)$

# Multiples Testen

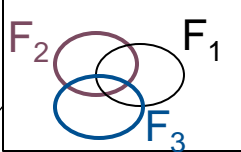
- Microarray Test mit  $m=1000$  Genen
- 1000 t-Tests auf dem 5% Sign.niveau
- Angenommen, kein Gen hat einen Effekt:

Ca. 50 Tests (5% von 1000) werden trotzdem ein signifikantes Ergebnis liefern !

50 Gene werden als “wichtig” angegeben, obwohl sie gar nicht “wichtig” sind.

- Wie erzeugt man eine Liste von “wirklich wichtigen” Genen?

# Multiples Testen: Bonferroni Korrektur

- Wollen eine “konservative” Liste mit der Eigenschaft:  
 $P(\text{mind. ein Fehler 1. Art}) \leq \alpha$
- Bonferroni Korrektur: Teste jedes Gen mit Sign.niveau  $\frac{\alpha}{m}$ ,  
statt  $\alpha$ ;  $m$  ist die Anzahl Gene
- Begründung:  
 $F_i$ : Fehler 1. Art bei Gen  $i$   


“union bound”: Gesamtfläche ist sicher kleiner als Summe der Einzelflächen

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m F_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(F_i) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha}{m} = \alpha$$
- Nachteil: Liste ist evtl. “extrem” konservativ (z.B. gar kein Gen enthalten)

# Wiederholung: Hypothesentests

- Für Prüfung  
Eine Aufgabe: **Binomialtest**  
Eine Aufgabe: **t-Test und Vorzeichentest**

Test	Was wird getestet	Bsp
<b>Binomialtest</b>	Ist Anteil in Gruppe gleich $\pi_0$ ?	Wirksamkeit von Medikament
<i>t-Test: Eine Stichprobe</i>	<i>Ist Erwartungswert in Gruppe gleich <math>\mu_0</math>?</i>	<i>Füllmenge in Getränkeflaschen</i>
<i>t-Test: 2 gepaarte Stichproben</i>	<i>Ist Erwartungswert in beiden Gruppen gleich?</i>	<i>Reaktionszeit von Haupt- und Nebenhand</i>
<i>Vorzeichentest</i>	<i>Ist Median in Gruppe gleich <math>\mu_0</math>?</i>	<i>Wie oben</i>
<i>t-Test: 2 ungepaarte Stichproben</i>	<i>Ist Erwartungswert in beiden Gruppen gleich?</i>	<i>Aktivität von Gen XY bei Gesunden und Kranken</i>