Musterlösung zu Serie 9

1. X_i = Inhalt (in Zentiliter) der i-ten Weinflasche, $i = 1, \dots, n = 12$.

a) 1. **Modell:** $X_1, \dots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1.5^2$ bekannt.

2. **Nullhypothese:** H_0: $\mu = \mu_0 = 70$
Alternative: H_A: $\mu < \mu_0$

3. **Teststatistik:**

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma}$$

Verteilung der Teststatistik unter H_0: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 5\%$

5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**
$\Phi(0.95) = 1.645 \Rightarrow K = (-\infty, -1.645]$

6. **Testentscheid:**

$$z = \sqrt{12}\,\frac{70.25 - 70}{1.5} = 0.5774.$$

$z \notin K \;\rightarrow\; H_0$ beibehalten. Es ist also durchaus plausibel, dass der Weinhändler den Wein korrekt abfüllt.

b) 1. **Modell:** $X_1, \dots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt; geschätzter Wert: $\hat{\sigma}_x^2 = 1.96^2$

2. **Nullhypothese:** H_0: $\mu = \mu_0 = 70$
Alternative: H_A: $\mu < \mu_0$

3. **Teststatistik:**

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\hat{\sigma}_X}$$

Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim t_{n-1}$

4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 5\%$

5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**
$t_{11;0.95} = 1.796 \Rightarrow K = (-\infty, -1.796]$

6. **Testentscheid:**

$$t = \sqrt{12}\,\frac{70.25 - 70}{1.96} = 0.441.$$

$t \notin K \;\rightarrow\; H_0$ beibehalten. Wir kommen also zum selben Ergebnis wie in Teilaufgabe a).

c) In dieser Teilaufgabe bezeichnet μ den Median der stetigen Zufallsvariblen X, also $P(X \leq \mu) = 0.5$.

1. **Modell:**

$$X_1, \dots, X_{12} \text{ i.i.d. }, \tag{1}$$

wobei X_i eine beliebige Verteilung hat.

2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \mu = \mu_0 = 70$,
Alternative: $H_A: \ \mu < \mu_0$
3. **Teststatistik:** V : Anzahl X_i's mit $(X_i > \mu_0)$
Verteilung der Teststatistik unter H_0: $V \sim$ Bin$(12, 0.5)$.
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:** $K = [0, c]$ mit $c = \max\{v : P(V \leq v) \leq \alpha\}$.
Es gilt $P(V \leq 2) = 0.019$ und $P(V \leq 3) = 0.073$. Also $c = 2$.
6. **Testentscheid:** $v = 7$;$7 \notin K$;$\rightarrow$ H_0 beibehalten.

2. **a)** $\left[-403 \pm t_{9-1;97.5\%} \cdot \frac{3.127}{\sqrt{9}}\right] = [-403 \pm 2.31 \cdot 1.042] = [-405.4, -400.6]$

b) Da -400.0 nicht im 95%-Vertrauensintervall liegt, würde die Nullhypothese $H_0 : \mu = -400.0$ zu Gunsten der Alternative $H_A : \mu \neq -400.0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden. Die Beobachtungen und die Hypothese $H_0 : \mu = -400.0$ passen also nicht gut zusammen und daher ist die wahre Differenz wohl nicht -400.0.

3. (Dies ist eine leicht abgeänderte Prüfungsaufgabe aus dem Sommer 2012)
F. Lauer möchte das Gerücht überprüfen, dass Blumen schneller wachsen, wenn man mit ihnen redet. Daher kauft sie acht identische Blumenzwiebeln, schickt jeweils zwei davon zu jedem ihrer vier Kinder und bittet sie, die beiden Blumenzwiebeln genau gleich zu behandeln. Mit dem einzigen Unterschied, dass sie nur mit der einen Blume reden sollen. Nach sechs Wochen erkundigt sie sich, wie hoch die Blumen gewachsen sind und erhält folgende Antworten (in cm):

Kind	1	2	3	4
Blume (beredet)	30.3	32.2	29.9	30.1
Blume (nicht beredet)	30.1	31.9	29.9	30.0

Nun möchte sie mit Hilfe dieser Daten herausfinden, ob an dem Blumengerede etwas dran ist und bittet Sie, einen geeigneten statistischen Test durchzuführen. Nehmen Sie an, dass die Differenzen Höhe Blume (beredet) minus Höhe Blume (nicht beredet) normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 sind.

a) Es handelt sich um einen gepaarten Test. Warum?
Jeder beredeten Blume kann eindeutig eine nicht beredete Blume zugeordnet werden: diejenige, die vom selben Kind gepflegt wird.

b) Geben Sie die Null- und die Alternativhypothese an und begründen Sie kurz Ihre Wahl.

$$H_0 : \mu = 0$$
$$H_A : \mu > 0$$

wobei μ der Erwartungswert von $D_i = X_i - Y_i$ ist mit X_i: Höhe der Blume (beredet), Y_i: Höhe der Blume (nicht beredet).
Mehrheitlich wird geglaubt, dass das Reden mit Blumen (bei ansonsten gleicher Behandlung) keinen Unterschied macht. Wenn man dies also nach einem Experiment behauptet, möchte man sich sicher sein, dass seine Aussage auch stimmt. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 'Reden macht keinen Unterschied, aber ich behaupte, er macht einen.' ist also zu beschränken. Daher wird dies der Fehler erster Art. Da F. Lauer nur ein schnelleres (aber kein langsameres) Wachstum interessiert, ziehen wir einen einseitigen Test vor: Er hat eine größere Macht als der zweiseitige Test.

c) Geben Sie eine Schätzung $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz σ^2 der Differenz an (mit Lösungsweg). Mit $n = 4$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{1}{4}(0.2 + 0.3 + 0 + 0.1) = 0.15\\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2\\ &= \frac{1}{3}\left((0.05)^2 + (0.15)^2 + (0.15)^2 + (0.05)^2\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(2 \cdot 0.0025 + 2 \cdot 0.0225\right) = \frac{1}{3}0.05 = \frac{5}{300}\end{aligned}$$

d) Führen Sie den geeigneten t-Test zum Niveau 0.05 durch: Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik T und dessen Verteilung unter der Nullhypothese, den Verwerfungsbereich für T und den Testentscheid. (Wenn Sie obige Aufgabe c) nicht lösen konnten, benutzen Sie im Folgenden $\hat{\sigma}^2 = \frac{5}{300}$.)

1. Modell: $D_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. Nullhypothese: $H_0 : \mu = 0$
   Alternative: $H_A : \mu > 0$
3. Teststatistik:

$$T = \frac{\sqrt{n}\bar{D}}{\hat{\sigma}} = \frac{\sqrt{4} \cdot (0.15)}{\sqrt{\frac{5}{300}}} \approx 2.324$$

   Verteilung von T unter H_0: $T \sim t_{n-1} = t_3$.

4. Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$
5. Verwerfungsbereich:

$$K_1 = [t_{n-1;1-\alpha}; \infty) = [t_{3;0.95}; \infty) = [2.353; \infty)$$

6. Testentscheid: $T \notin K_1 \Rightarrow H_0$ wird nicht verworfen.

e) Bestimmen Sie ein einseitiges 95%-Vertrauensintervall für μ.

$$\begin{aligned} & 0.95 \leq \mathbf{P}\left(t_{n-1;1-\alpha} \geq \sqrt{n}\frac{\bar{D} - \mu}{\hat{\sigma}}\right) = \mathbf{P}\left(\mu \geq \bar{D} - \frac{\hat{\sigma} t_{n-1;1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right)\\ \Rightarrow \quad & \text{VI} = \left[\bar{D} - \frac{\hat{\sigma} t_{n-1;1-\alpha}}{\sqrt{n}}; \infty\right) \approx [-0.002, \infty)\end{aligned}$$

f) Sie sind der statistische Berater von F. Lauer und haben die Berechnungen durchgeführt. Was sagen Sie ihr nun?
Liebe F. Lauer.
Derzeit gibt es keinen Grund, der Sprich-mit-Blumen-Theorie Glauben zu schenken.
Allerdings wurde die Nullhypothese nur gerade ebenso nicht abgelehnt und die Samplegröße ist sehr klein. Daher empfehle ich Ihnen, das Experiment in größerem Maßstab zu wiederholen.

g) Angenommen, der Wert σ^2 wäre nicht aus den Daten geschätzt, sondern bekannt: Wie lautet dann das einseitige 95%-Vertrauensintervall? Geben Sie eine kurze Erklärung für den Unterschied zu e)!

$$\text{VI} = \left[\bar{D} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) = [0.044; \infty)$$

Das Vertrauensintervall wird kleiner da die Unsicherheit aus der Schätzung von σ wegfällt.