Schriftliche Prüfung
(90 Minuten)

Bemerkungen:

- Alle schriftlichen Hilfsmittel und ein Taschenrechner sind erlaubt.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Die Prüfung besteht aus insgesamt **20 Aufgaben**.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!
- Jede Aufgabe besteht aus mehreren Aussagen. Pro Aufgabe kann keine, eine oder mehrere Aussagen richtig sein.
- Für jede Aussage gibt es 1 Punkt, wenn sie korrekt markiert wird. 1 Punkt wird abgezogen, wenn eine Aussage falsch markiert wird. Wenn eine Aussage nicht markiert wird, gibt es keinen Punkt, es wird aber auch kein Punkt abgezogen.
- Alle numerischen Ergebnisse werden auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Viel Erfolg!

I. Binomialverteilung und -test

1. Welche der folgenden Aussagen ist richtig und welche ist falsch?

a) Eine faire Münze wird 10 mal unabhängig voneinander geworfen. X ist die Zufallsvariable, die Anzahl Kopf beschreibt. X kann gut durch eine Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = 0.5$ modelliert werden.

b) Bei einer Losbude sind noch 5 Lose in der Lostrommel. Der Losbudenbesitzer sagt, dass unter den 5 Losen noch 2 Gewinne sind. Wir kaufen 3 Lose. Die Anzahl Gewinne unter den 3 Losen kann gut durch eine Binomialverteilung mit $n = 3$ und $p = 2/5$ modelliert werden.

c) Die Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = 0.1$ kann gut durch die Normalverteilung approximiert werden.

d) In einem Spieleladen haben wir einen (fairen) hundertseitigen Würfel gefunden, der die Zahlen 1 bis 100 würfeln kann. Die Zufallsvariable X ist die Zahl, die nach einem Wurf oben liegt. Es gilt $X \sim Bin(n = 1, p = 1/100)$.

2. Angenommen es ist $X \sim \text{Bin}(n = 8, p = 0.2)$. Dann gilt ...

a) ... $E[X] = 8.20$.

b) ... $Var(X) = 1.28$.

c) ... $P(X = 2) = \binom{8}{2}\, 0.2^6\, 0.8^2$.

d) ... $P(X <= 2) = 0.80$.

3. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Ein Medikamentenhersteller möchte mit einem Binomialtest prüfen, ob die Wirksamkeit des Medikaments X besser als 0.3 ist. Der Test mit der Alternative $H_A : p > 0.3$ hat dann grössere Macht als der Test mit der Alternative $H_A : p \neq 0.3$.

b) Ein zweiseitiger Binomialtest kann (bei hinreichender Macht) sowohl auffällig grosse als auch auffällig kleine Gewinnwahrscheinlichkeiten detektieren.

c) Bei einem Binomialtest ist das Modell $X \sim Bin(n = 15, p = 0.3)$ unter der Nullhypothese. Aus den Daten erhält man die Schätzung $\hat{p} = 0.05$. Die Teststatistik hat dann die Verteilung $T \sim Bin(n = 15, p = 0.05)$.

d) Das Signifikanzniveau bei einem Binomialtest ist 5%. Angenommen, die Nullhypothese ist richtig. Dann verwerfen wir die Nullhypothese mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit.

4. Wir möchten einen Binomialtest mit dem Modell $X \sim Bin(n = 10, p)$, $H_0 : \; p = 0.4$ und $H_A : \; p < 0.4$ auf dem 5% Signifikanzniveau durchführen.

a) Der Verwerfungsbereich für die Teststatistik ist $K = \{0, 1\}$.

b) Wenn man den Test auf dem 1% Signifikanzniveau durchführt, wird der Verwerfungsbereich gleich viele oder mehr (aber nicht weniger) Elemente enthalten.

c) Wenn man den Test mit $p = 0.5$ anstelle von $p = 0.4$ durchführt, wird der Verwerfungsbereich gleich viele oder mehr (aber nicht weniger) Elemente enthalten.

d) Angenommen der Verwerfungbereich für die Anzahl Erfolge ist $K = \{0, 1\}$ und wir beobachten zwei Erfolge. Damit ist bewiesen, dass die Nullhypothese stimmt.

5. Bei einem Binomialtest $(n = 8, \alpha = 0.05)$ wurde der Verwerfungsbereich $K = \{0, 1\}$ konstruiert.

a) Die Macht berechnet sich als 1 - Fehler 1.Art.

b) Die Macht für die Alternative $H_A : \; p = 0.25$ ist 0.37.

c) Die Macht für die Alternative $H_A : \; p = 0.35$ ist grösser als die Macht für die Alternative $H_A : \; p = 0.25$.

d) Angenommen die Macht für eine gewisse Alternative ist 0.4 und diese Alternative ist richtig. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese verworfen wird, ist dann 0.4.

6. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Ihr Kollege hat bei einem Binomialtest einen p-Wert von 3.7% berechnet. Sie rechnen den Test nochmals mit genau den gleichen Daten durch. Dann können Sie die Nullhypothese auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen.

b) Eine faire Münze wurde 10-mal geworfen und hat nie Kopf gezeigt. Wir führen einen Binomialtest mit diesen Daten durch (X: Anzahl Kopf bei 10 Würfen; $H_0 : \; p = 0.5, H_A : \; p < 0.5$). Der p-Wert ist dann kleiner als 1%.

c) Bei einem gefälschten 6-seitigen Würfel wurde bei 30 Würfen 17 mal die 6 gewürfelt. Die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich $[0.39, 0.74]$? (Verwenden Sie eine geeignete Normalapproximation)

d) Ein 95%-Vertrauensintervall enthält den wahren Parameter mit einer Wahrscheinlichkeit von 5%.

II. t-Test

7. P. Baader, der Besitzer einer Badeanstalt am Zürichsee, verzeichnet dieses Jahr deutlich weniger Badegäste als im Vorjahr. Er vermutet als Hauptursache, dass die Seetemperatur im Jahr 2012 deutlich höher war als im aktuellen Jahr 2013. Falls er statistisch korrekt nachweisen kann, dass die durchschnittliche monatliche Temperatur im Vorjahr mehr als 2°C höher war als in diesem Jahr, kann er bei der Freibadvereinigung Anspruch auf eine Schlechtwetter-Entschädigung geltend machen.

Er beauftragt Sie, einen geeigneten statistischen Test durchzuführen. Zu diesem Zweck stellt er Ihnen die folgende Tabelle mit den durchschnittlichen Seetemperaturen für die Monate März bis Juli der Jahre 2012 und 2013 zur Verfügung:

	März	April	Mai	Juni	Juli
Jahr 2012	7.1	11.8	15.1	19.7	21.0
Jahr 2013	5.6	9.3	12.2	16.5	18.6
Differenz	1.5	2.5	2.9	3.2	2.4

Nehmen Sie an, dass die monatlichen Differenzen Seetemperatur im Jahr 2012 minus Seetemperatur im Jahr 2013 unabhängig voneinander normalverteilt mit Erwartungswert μ_D und Standardabweichung σ_D sind. Aus den Daten wurden $\hat{\mu}_D = \bar{D} = 2.5$ und $\hat{\sigma}_D = s_D = 0.64$ geschätzt.

Betrachten Sie folgende Aussagen.

a) Es handelt sich um gepaarte Stichproben, weil jeder Beobachtung aus 2012 genau eine Beobachtung aus 2013 zugewiesen werden kann.

b) Bei einem ungepaarten t-Test müssen die Stichprobengrössen in beiden Gruppen unterschiedlich sein.

c) Wenn die beiden Stichproben gepaart sind, hat der gepaarte t-Test eine kleinere Macht als der ungepaarte t-Test.

d) Bevor man entscheiden kann, ob zwei Stichproben gepaart oder ungepaart sind, muss das Signifikanzniveau festgelegt werden.

8. Wir führen einen gepaarten t-Test mit den Daten aus Aufgabe 7 auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ durch.

a) Am besten verwendet man die Hypothesen $H_0 : \mu_D = 2, H_A : \mu_D > 2$, da die Macht so am grössten ist.

b) Der beobachtete Wert der Teststatistik ist $\sqrt{5}(2.5 - 2)/0.64$.

c) Unter H_0 folgt die Teststatistik einer $t3$ -Verteilung.

d) Angenommen wir hätten bei dem Test die Altenativhypothese $H_A : \mu_D < 2$ verwendet. Der Verwerfungsbereich ist dann $[-\infty, 2.132]$.

9. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen, bei einem gepaarten t-Test ($H_0 : \mu_d = 0, H_A : \mu_d \neq 0$, 12 Beobachtungen pro Gruppe) ist der beobachtete Wert der Teststatistik 1.3. Dann ist der p-Wert etwa 20%.

b) Ein t-Test liefert einen p-Wert von 3.7%. Der entsprechende Hypothesentest würde auf dem 5% Signifikanz die H_0 verwerfen.

c) Ein exaktes zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für μ_d aus Aufgabe (7) ist $[2.5 \pm 2.78 * 0.64]$.

d) Wir haben einen t-Test auf dem 5% Signifikanzniveau durchgeführt. Dieser hat die Nullhypothese nicht verworfen. Von einem Experten erhalten wir die wahre Standardabweichung, so dass wir einen z-Test durchführen können. Der z-test liefert immer dasselbe Ergebnis wie der t-Test.

10. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen das zweiseitige 95%-Vertrauensintervall für μ_d ist $[-2.3, 3.4]$. Das entsprechende 99%-Vertrauensintervall ist dann breiter.

b) Angenommen das 95%-Vertrauensintervall für μ_d ist $[1.2, 4.1]$. Der entsprechende t-Test ($H_0 : \mu_d = 1, H_A : \mu_d \neq 1$) würde auf dem 5% Signifikanzniveau die H_0 verwerfen.

c) Angenommen das 95%-Vertrauensintervall bei einem t-Test ist nach einem Experiment $[-0.2, 1.7]$. Wenn man das Experiment wiederholt, wird das 95%-Vertrauensintervall gleiche Lage und Breite haben.

d) Angenommen, für die Praxis sind Werte von $\mid \mu_d \mid$ von weniger als 3.0 irrelevant. Ein 95%-Vertrauensintervall für μ_d ist $[-1.4, 1.7]$. Es ist plausibel anzunehmen, dass kein relevanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen besteht.

III. Lineare Regression

11. Oskar und Max werfen nacheinander einen Ball von unterschiedlich hohen Positionen (hoehe) auf den Boden und messen die Zeit (zeit) bis der Ball aufschlägt. Folgendes Modell wurde an die Daten angepasst:

$$\text{hoehe}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{zeit}_i + \beta_2 \cdot \text{zeit}_i^2 + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Der (unvollständige) Regressionsoutput sieht wie folgt aus:

```
Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-2.359 -0.692 -0.185  0.926  2.522

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     1.987      2.572     ???      ???
zeit              ???      2.326   -0.82     0.42
zeit.quadrat    5.340      0.492   10.86  2.9e-12
Signif. codes:
0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.31 on 32 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.994,       Adjusted R-squared:  0.994
```

Betrachten Sie die folgenden Aussagen.

a) Oskar und Max haben 34 Messungen gemacht.

b) $H_0 : \beta_0 = 0$ wird auf dem 5%-Niveau verworfen.

c) Die Schätzung von $\hat{\beta}_1$ ist -1.91.

d) Ein exaktes zweiseitiges 99%-Vertrauensintervall für β_2 ist $[4.36, 6.32]$.

12. Mit Hilfe des geschätzten Modells aus Aufgabe 11 wollen wir nun Vorhersagen machen. Welche der folgenden Aussagen ist wahr und welche ist falsch?

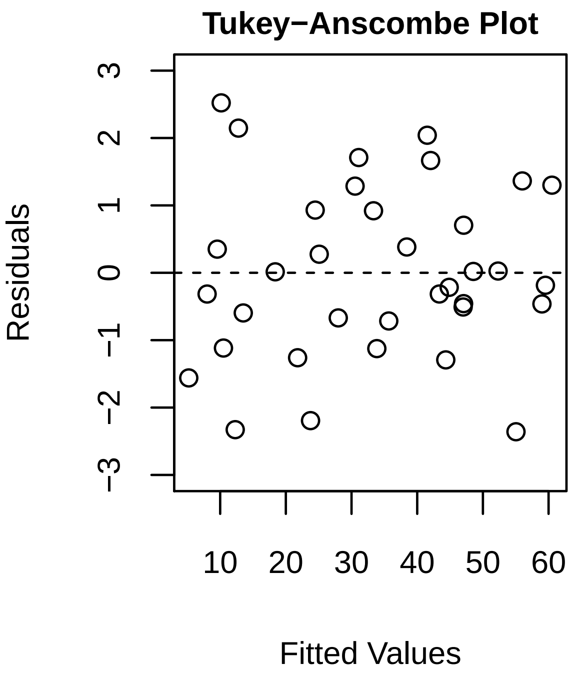
a) Wenn der Ball 3 Sekunden lang fällt, dann ist er gemäss unserem Modell aus einer Höhe von etwa 35 Meter gestartet.

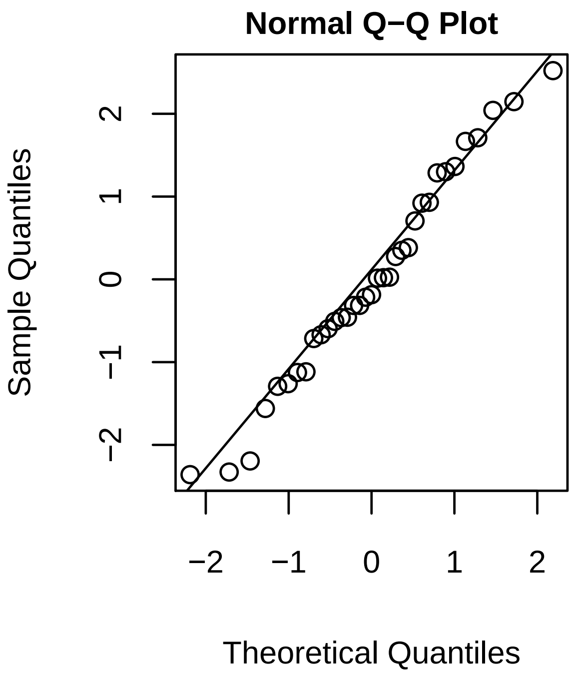
b) Oskar und Max werfen den Ball aus 20 Metern Höhe herunter und messen dabei 2 Sekunden bis zum Aufprall. Der Fehler gemäss dem Modell (= Residuum) ist dann -1.4 Meter.

c) Ein 95%-Vertrauensintervall für die erwartete Höhe bei einer Fallzeit von 1.5 Sekunden ist [9m, 11m]. Wenn wir also beim nächsten Experiment 1.5 Sekunden messen ist der Ball mit 95% Wahrscheinlichkeit aus einer Höhe zwischen 9m und 11m gestartet.

d) Das 95%-Vorhersageintervall für die Höhe ist mindestens so gross wie das 95%-Vertrauensintervall für die erwartete Höhe bei gleicher Fallzeit.

13. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots, die die Residuen aus dem Regressionsmodell der Aufgabe 11 zeigen.





Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

a) Es handelt sich nicht um ein lineares Modell, weil die Zeit im Quadrat vorkommt.

b) Die Annahme der konstanten Fehlervarianz ist erfüllt.

c) Die Residuen sind relativ gut normalverteilt.

d) Es gibt systematische Abweichungen vom Modell.

IV. Gemischte Fragen

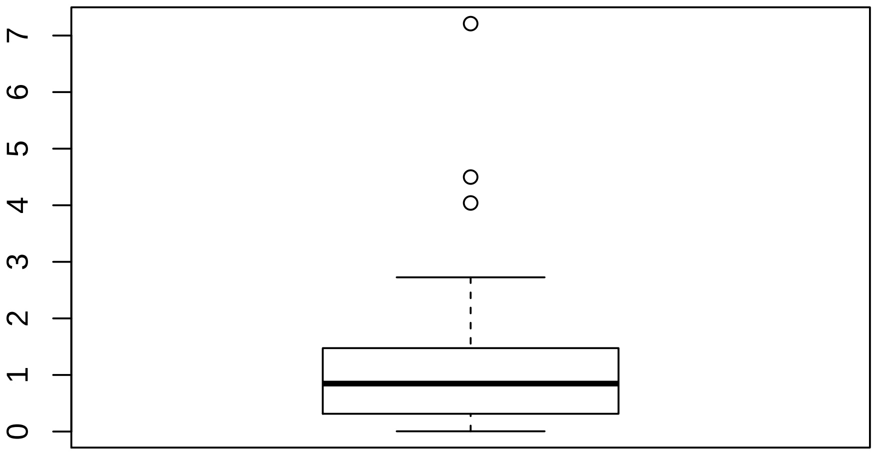
14. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.

a) Wenn $P(A) = 0.7$ und $P(B) = 0.5$, dann gilt $P(A \cup B) = 1.2$.
b) Wenn $P(A) = 0.6$, dann sind die odds für A gleich 1.5.
c) Wenn $X \sim \mathcal{N}(3, 8)$, dann ist $P(X = 5) \approx 0.11$.
d) Es seien A und B sind abhängig. Wenn $P(A) = 0.2$ und $P(B) = 0.5$, dann gilt $P(A \cap B) = 0.1$.

15. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.

a) Seien $X \sim \mathcal{N}(2, 16)$ und $Y \sim Pois(3)$ unabhängig. $E[X - 2Y + 2]$ ist -2.
b) Seien $X \sim \mathcal{N}(2, 16)$ und $Y \sim Pois(3)$ unabhängig. $Var(X + 3Y - 5)$ ist 38.
c) A nimmt nur die Werte $\{1, 2\}$ an. Es sei $P(B|A = 1) = 0.2$, $P(B|A = 2) = 0.1$ und $P(A = 1) = 0.1$. Dann ist $P(A = 1|B) = 0.18$.
d) In den meisten Fällen gilt: $P(A|B) = P(B|A)$.

16. Betrachten Sie den nachfolgenden Boxplot.



Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

a) Der Median ist etwa bei 1.
b) 50% der Daten sind grösser als 2.
c) Der Mittelwert der Daten ist kleiner als der Median der Daten
d) Sei G die Anzahl Daten, die grösser als der Median sind und K die Anzahl Daten, die kleiner als der Median sind. Dann gilt $G \approx 2K$.

17. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

a) Die Funktion

$$f_{(x)} = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ oder } x > 2 \\ 2 & 0 < x < 2 \end{cases} .$$

ist eine Dichtefunktion.

b) Ein Spielautomat hat pro Spiel einen erwarteten Gewinn von -1 SFr (man verliert also im Mittel Geld) und eine Standardabweichung von 3 SFr. Die Spiele können als unabhängig voneinander angenommen werden. Wir wollen 100 Spiele machen. Mit 95% Wahrscheinlichkeit haben wir nach den Spielen einen totalen Gewinn im Bereich zwischen etwa -160 und etwa -40 SFr.

c) Wir haben einen t-Test für eine Stichprobe (n = 12 Beobachtungen) gemacht und dabei auch ein 95%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert berechnet. Nun wollen wir das Experiment und die Auswertung noch einmal machen. Das Vertrauensintervall soll aber diesmal in etwa nur halb so breit sein. Dann brauchen wir etwa 24 Beobachtungen.

d) Wenn in einem Test der p-Wert 0.12 ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese stimmt gleich 0.12.

18. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt mit $\mu = 3$ und $\sigma^2 = 5$. Dann ist

$$Y = 2X \sim \mathcal{N}(2 \cdot 3, 2 \cdot 5).$$

b) Eine Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.1 & -1 \le x < 0 \\ 0.3 & 0 \le x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann $P(X \le 2) = 0.7$.

c) Sei X, Y und Z Zufallsvariablen mit $Y = 3X + 2$ und $Z = 2X - 3$. Dann gilt

$$\mathrm{Corr}(X, Y) < \mathrm{Corr}(X, Z).$$

d) Ruben wohnt an einer stark befahrenen Strasse und ärgert sich über die vielen Autos. Deshalb möchte er ein statistisches Modell erstellen für die Anzahl Autos pro Minute, die an seinem Schlafzimmerfenster vorbeifahren. Die Binomialverteilung wäre dafür geeignet.

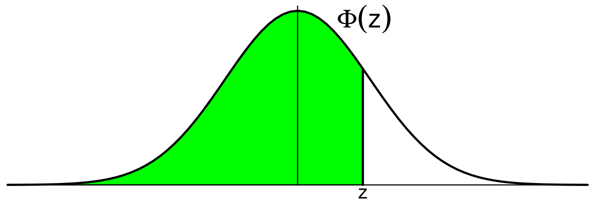
19. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit kumulativer Verteilungsfunktion $F(x)$.

a) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b F(x)dx$.
b) Wenn X normalverteilt ist, dann gilt $\mathcal{E}[X] = \text{Median}(X)$.
c) Wenn X uniform verteilt ist auf $[0, 1]$, dann ist $F(x)$ linear für $x \in [0, 1]$.
d) $F(x)$ ist immer monoton steigend (also evtl. mal konstant aber nie sinkend).

20. Es seien X, Y i.i.d. Poisson(λ) verteilt. Dann gilt

a) $X + Y \sim \text{Poisson}(2\lambda)$
b) $2X \sim \text{Poisson}(2\lambda)$
c) $\text{Var}(2X - Y) = 5\lambda$
d) X ist für grosse n ungefähr verteilt wie eine Zufallsvariable mit einer Binomial $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$-Verteilung.

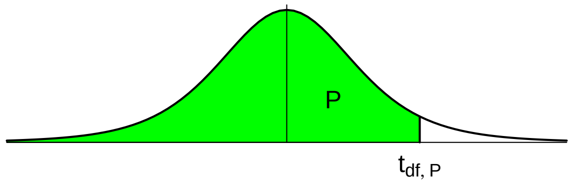
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}\left[Z \leq z\right], \ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}\left[Z \leq 1.96\right] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576