Musterlösung zu Serie 8

1. **a)** Es ist schwieriger, eine Grenzüberschreitung nachzuweisen, wenn die Standardabweichung aus den Daten geschätzt wird. Die Verteilung der Teststatistik

$$T = \frac{\overline{X} - 200}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

folgt einer t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden und ist insbesondere breiter als die Verteilung von

$$Z = \frac{\overline{X} - 200}{\sigma/\sqrt{n}}$$

mit bekanntem σ. Der kritische Wert der Teststatistik ist demnach grösser als für bekanntes σ und die Macht des t-Testes ist kleiner als die des z-Testes.

b) Der t-Test wird folgendermassen formal durchgeführt:

Modellannahme:	X_i: $i-$te Ammoniumbestimmung. X_i i.i.d. $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ mit σ unbekannt.
Nullhypothese H_0:	X_i i.i.d. $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$ mit $\mu_0 = 200$
Alternative H_A:	X_i i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu > 200$ (einseitig)
Verwerfungsbereich:	Aus der Tabelle: $\mathcal{K} = \{t : t_{15,0.95} > 0.95\} =]1.753, \infty]$. Dies entspricht dem Verwerfungsbereich $]204.38, \infty]$ für $\overline{X}$.
Wert der Teststatistik:	$t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{204.2-200}{\widehat{\sigma}/\sqrt{16}} = 1.68$
Testentscheid:	$1.68 \notin \mathcal{K}$, also kann die Nullhypothese nicht verworfen werden. Eine Grenzwertüberschreitung ist statistisch nicht gesichert.

Der Unterschied zum z-Test ist nicht sehr gross, führt hier aber gerade dazu, dass die Nullhypothese nicht mehr verworfen werden kann.

c) Die Daten sind evtl. nicht normalverteilt. Für nicht normalverteilte Daten hat der t-Test eine schlechte Macht. Der Vorzeichen- oder der Wilcoxon-Test sind in solchen Fällen besser geeignet.

2. **a)** X bezeichne den Schwermetallgehalt in einer Bodenprobe. Es gilt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \text{ mit } \sigma = 10 \text{ und } \mu \text{ unbekannt.}$$

Der Mittelwert $\overline{X}$ von $n = 10$ Stichproben ist auch normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$,

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

Da $\Phi(2.58) = 0.995$ (gegebener Hinweis), liegen 99% aller Beobachtungen von der standardisierten Zufallsvariable

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

in dem Intervall $[-2.58, 2.58]$. Also liegen 99% aller Beobachtungen von $\overline{X} - \mu$ im Intervall $[-2.58 \cdot \sigma/\sqrt{n}, 2.58 \cdot \sigma/\sqrt{n}]$. Ein 99% Vertrauensintervall für μ ist demnach gegeben durch

$$\left[\overline{X} - 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

Mit dem bekannten Wert von $\sigma = 10$, $\overline{x} = 31$ und $n = 10$ erhält man also ein 99% Vertauensintervall für μ von $[22.84, 39.16]$.

b) Aus a) sieht man, dass die Breite des Vertrauensintervalles wie $1/\sqrt{n}$ abfällt mit der Anzahl n von Beobachtungen. Also sind viermal so viele Beobachtungen, $4 \cdot 10 = 40$, nötig um die Breite des Vertrauensintervalles zu halbieren.

Die Breite des 99% Vertrausensintervalles ist, siehe a),

$$2 \cdot 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Um die Breite des Vertrauensintervalles kleiner als 1ppb zu erhalten, muss die Anzahl n der Beobachtungen entsprechend gross werden:

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \leq & 1 \\ \rightarrow \quad 51.6 & \leq & \sqrt{n} \\ \rightarrow \quad n & \geq & 2663. \end{array}$$

Es müssen mindestens 2663 Beobachtungen vorliegen, um ein 99% Vertrauensintervall von weniger als 1ppb Breite zu erhalten.

c) Die standardisierte Variable

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

mit Schätzwert $\widehat{\sigma}$ für σ ist nicht mehr normalverteilt (wie für bekanntes, festes σ), sondern folgt einer t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden, wobei

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}.$$

Das 99.5% Quantil dieser Verteilung ist bei 3.25 (siehe Tabelle). Insofern fallen 99% der Beobachtungen von

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

in das Intervall $[-3.25, 3.25]$. Ein Vertrauensintervall ist daher gegeben durch

$$\left[\overline{X} - 3.25 \cdot \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 3.25 \cdot \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right].$$

Für $\hat{\sigma} = 10$ und $n = 10$ ergibt sich das Vertrauensintervall $[20.72, 41.28]$.

Durch Vergleich mit a) findet man, dass das Vertrauensintervall um einen Faktor $3.25/2.58$, also um rund 26% grösser geworden ist.