

Musterlösung zu Serie 8

1. a) Es ist schwieriger, eine Grenzüberschreitung nachzuweisen, wenn die Standardabweichung aus den Daten geschätzt wird. Die Verteilung der Teststatistik

$$T = \frac{\bar{X} - 200}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

folgt einer t-Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden und ist insbesondere breiter als die Verteilung von

$$Z = \frac{\bar{X} - 200}{\sigma/\sqrt{n}}$$

mit bekanntem σ . Der kritische Wert der Teststatistik ist demnach grösser als für bekanntes σ und die Macht des t-Testes ist kleiner als die des z-Testes.

- b) Der t-Test wird folgendermassen formal durchgeführt:

Modellannahme: X_i : i -te Ammoniumbestimmung. X_i i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
mit σ unbekannt.

Nullhypothese H_0 : X_i i.i.d. $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$ mit $\mu_0 = 200$

Alternative H_A : X_i i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu > 200$ (einseitig)

Verwerfungsbereich: Aus der Tabelle:
 $\mathcal{K} = \{t : t_{15, 0.95} > 0.95\} =]1.753, \infty]$.
Dies entspricht dem Verwerfungsbereich $]204.38, \infty]$ für $\bar{X}$.

Wert der Teststatistik: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{204.2 - 200}{\hat{\sigma}/\sqrt{16}} = 1.68$

Testentscheid: $1.68 \notin \mathcal{K}$, also kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.
Eine Grenzwertüberschreitung ist statistisch nicht gesichert.

Der Unterschied zum z-Test ist nicht sehr gross, führt hier aber gerade dazu, dass die Nullhypothese nicht mehr verworfen werden kann.

- c) Die Daten sind evtl. nicht normalverteilt. Für nicht normalverteilte Daten hat der t-Test eine schlechte Macht. Der Vorzeichen- oder der Wilcoxon-Test sind in solchen Fällen besser geeignet.

2. a) X bezeichne den Schwermetallgehalt in Kopfsalaten. Es gilt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \text{ mit } \sigma = 10 \text{ und } \mu \text{ unbekannt.}$$

Der Mittelwert $\bar{X}$ von $n = 10$ Stichproben ist auch normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$,

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

Da $\Phi(2.58) = 0.995$ (gegebener Hinweis), liegen 99% aller Beobachtungen von der standardisierten Zufallsvariable

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

in dem Intervall $[-2.58, 2.58]$. Also liegen 99% aller Beobachtungen von $\bar{X} - \mu$ im Intervall $[-2.58 \cdot \sigma/\sqrt{n}, 2.58 \cdot \sigma/\sqrt{n}]$. Ein 99% Vertrauensintervall für μ ist demnach gegeben durch

$$\left[\hat{\bar{X}} - 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\bar{X}} + 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

wobei $\hat{\bar{X}}$ der beobachtete Mittelwert ist, hier $\hat{\bar{X}} = 31$. Mit dem bekannten Wert von $\sigma = 10$ und $n = 10$ erhält man also ein 99% Vertrauensintervall $[22.84, 39.16]$.

- b) Aus a) sieht man, dass die Breite des Vertrauensintervalles wie $1/\sqrt{n}$ abfällt mit der Anzahl n von Beobachtungen. Also sind viermal so viele Beobachtungen, $4 \cdot 10 = 40$, nötig um die Breite des Vertrauensintervalles zu halbieren.

Die Breite des 99% Vertrauensintervalles ist, siehe a),

$$2 \cdot 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Um die Breite des Vertrauensintervalles kleiner als 1ppb zu erhalten, muss die Anzahl n der Beobachtungen entsprechen gross werden:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq 1 \\ \rightarrow 51.6 &\leq \sqrt{n} \\ \rightarrow n &\geq 2663. \end{aligned}$$

Es müssen mindestens 2663 Beobachtungen vorliegen, um ein 99% Vertrauensintervall von weniger als 1ppb Breite zu erhalten.

- c) Die standardisierte Variable

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

mit Schätzwert $\hat{\sigma}$ für σ ist nicht mehr normalverteilt (wie für bekanntes, festes σ), sondern folgt einer t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden. Das 99.5% Quantil dieser Verteilung ist bei 3.25 (siehe Tabelle). Insofern fallen 99% der Beobachtungen von

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

in das Intervall $[-3.25, 3.25]$. Ein Vertrauensintervall ist daher gegeben durch

$$\left[\hat{\bar{X}} - 3.25 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\bar{X}} + 3.25 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right].$$

Für $\sigma = 10$ und $n = 10$ ergibt sich das Vertrauensintervall $[20.72, 41.28]$.

Durch Vergleich mit a) findet man, dass das Vertrauensintervall einen Faktor $3.25/2.58$, also um rund 26% grösser geworden ist.