Musterlösung zu Serie 2

1. **a)** Nullhypothese: im Schnitt befinden sich 10 violette Smarties in jeder Packung.
Alternativhypothese: im Schnitt befinden sich weniger als 10 violette Smarties in jeder Packung.

b) Die Wahrscheinlichkeit für jedes Einzelereignis ist immer sehr klein.
Es ist z.B. auch sehr unwahrscheinlich *genau* 10 violette Smarties in einer Packung zu finden, selbst wenn sich *im Schnitt* 10 violette Smarties in einer Packung befinden.
Stattdessen muss man zeigen (um die Nullhypothese verwerfen zu können), dass die Wahrscheinlichkeit sehr klein ist (unter der Nullhypothese), ein mindestens so extremes Ereignis zu beobachten, wie man es eben beobachtet hat.
Also muss man zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit (unter der Nullhypothese) klein ist, *höchstens* fünf violette Smarties in der Packung zu finden.

c) Wir nehmen an, dass die Farbe von Smarties in einer Packung unabhängig sind. Die Anzahl X von violetten Smarties ist dann binomialverteilt

$$X \sim \mathcal{B}\langle n, p\rangle,$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein zufällig herausgegriffenes Smartie violett ist. Diese ist unter der Nullhypothese klein:

$$p = \frac{\text{durchschn. Anzahl violetter Smarties pro Pack.}}{\text{Anzahl Smarties pro Packung}} = \frac{10}{1000} = 1\%.$$

Gleichzeitig ist $n = 1000$ eher gross und daher kann die Verteilung von X durch eine Poissonverteilung mit Parameter

$$\lambda = n \cdot p = 10$$

angenähert werden:

$$P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens fünf violette Smarties zu finden, ist demnach unter der Nullhypothese:

$$\begin{aligned}
P[X \le 5] &= P[X = 0] + P[X = 1] + \ldots + P[X = 5] && (1)\\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + e^{-\lambda}\frac{\lambda^5}{5!} && (2)\\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda^k}{k!} && (3)\\
&= 0.067 = 6.7\%. && (4)
\end{aligned}$$

Man könnte die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch exakt mit der Binomialverteilung berechnen. Dies ergibt (nicht verlangt) eine Wahrscheinlichkeit von 6.61%. Die Poissonapproximation ist also nicht so schlecht.

d) Die berechnete Wahrscheinlichkeit ist noch etwas zu gross, als dass man die Aussage des Herstellers widerlegen könnte. Normalerweise wird verlangt, dass diese Wahrscheinlichkeit (der p-Wert) mindestens unter 5% liegt.
Hätte man allerdings z.B. nur vier violette Smarties in der Packung gefunden, so hätte man die Aussage des Herstellers (auf dem 5% Niveau) schon widerlegen können.

2. Da der Hersteller die Stichprobe **zufällig** einer **grossen** Lieferung entnimmt, können wir annehmen, dass die Anzahl X minderwertiger Gläser in der Stichprobe binomialverteilt ist: $X \sim \mathcal{B}\langle n, \pi\rangle$ (vgl. auch Aufgabe 1, Serie 2). Der Hersteller will nachweisen, dass die Lieferung einen Anteil minderwertiger Gläser von unter 10 % enthält (dann ist er "beruhigt"). Als Nullhypothese wählt er deshalb die Annahme, dass die Lieferung einen Anteil minderwertiger Gläser von 10% oder mehr enthält (er möchte die Nullhypothese ja gerne verwerfen).

a) $H_0 : X \sim \mathcal{B}\langle n, \pi_0 \rangle$, mit $n = 50$ und $\pi_0 = 0.1$

b) $H_A : X \sim \mathcal{B}\langle n, \pi \rangle$, mit $n = 50$ und $\pi < 0.1$.

c) Der einseitige Verwerfungsbereich für ein Signifikanzniveau von 5% kann im Falle unseres Beispiels einfach berechnet werden. Die kritische Grenze c erfüllt folgende Bedingung:

$$P_0\langle X \leq c \rangle = \sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} \pi_0^k (1-\pi_0)^{n-k} \leq 0.05$$

Es gilt:

$P_0\langle X = 0 \rangle$	=	0.0052	$P_0\langle X \leq 0 \rangle$	=	0.0052
$P_0\langle X = 1 \rangle$	=	0.0286	$P_0\langle X \leq 1 \rangle$	=	0.0338
$P_0\langle X = 2 \rangle$	=	0.0779	$P_0\langle X \leq 2 \rangle$	=	0.1117

Der Verwerfungsbereich K für ein Signifikanzniveau von 5% ist also gegeben durch $K = \{X \leq 1\}$. Der Annahmebereich K^c ist gegeben durch $K^c = \{X > 1\}$.

d) Es wurden $X = 3$ minderwertige Gläser in der Stichprobe beobachtet. Die Beobachtung liegt im Annahmebereich. Man sagt, die Nullhypothese werde **beibehalten**, d.h. es ist durchaus plausibel, dass die Lieferung einen Anteil minderwertiger Gläser von 10% oder mehr enhält, obwohl in der Stichprobe ein Anteil von nur 6% festgestellt wurde. Das beobachtete Ereignis ist nicht genügend "extrem" bzw. unwahrscheinlich, um die Nullhypothese zu verwerfen.