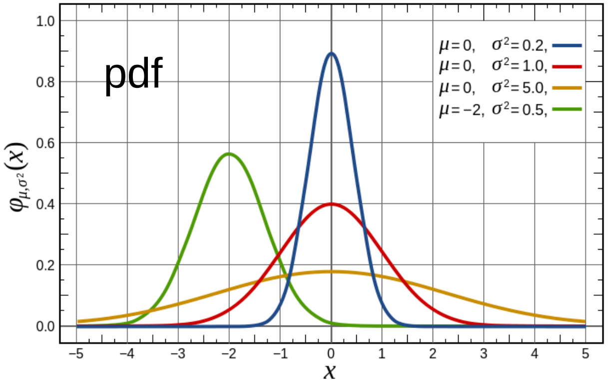
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Hypothesentests für Erwartungswert und Median

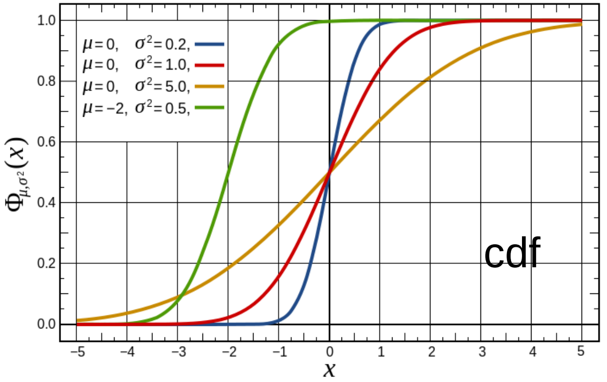
Statistik (Biol./Pharm./HST) – Herbst 2013

Normalverteilung

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
  'X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2'



- pdf: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$



- cdf: ???

- Zentraler Grenzwertsatz:

$$X_i \sim F \;\; iid$$
$$E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$$
$$\rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \;\; falls\; n \rightarrow \infty$$
$$\rightarrow S \sim N(n\mu, n\sigma^2) \;\; falls\; n \rightarrow \infty$$

Zentraler Grenzwertsatz (ZGS)

- Ann: $X_1, \ldots, X_n \sim F\ iid;\quad E(X_i) = \mu,\ \ Var(X_i) = \sigma_X^2$

neu

$$\overline{X}_n \approx N\underbrace{\left(\mu, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)}_{\text{aus GGZ}}$$

oder äquivalent mit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$:

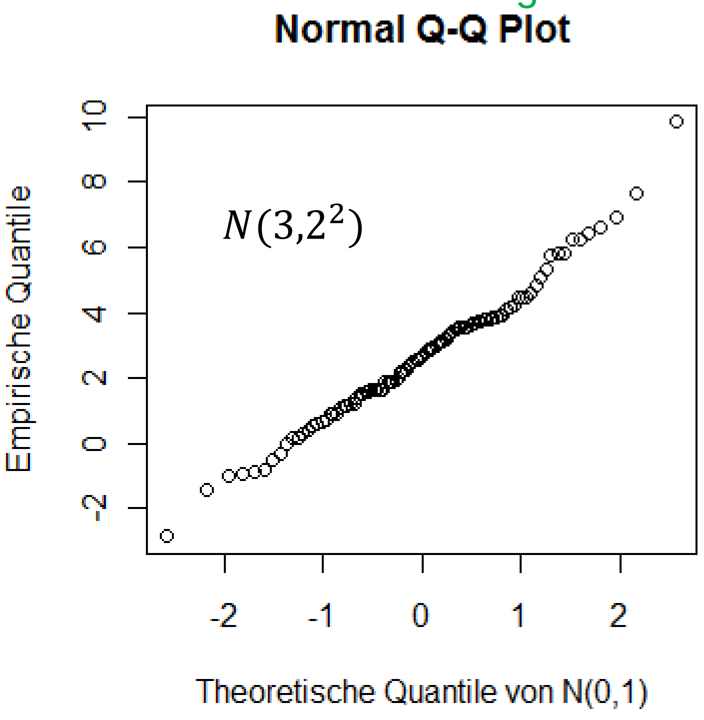
$$S_n \approx N(n\mu, n\sigma_X^2)$$

Wie prüft man, ob eine Normalverteilung vorliegt?

- Histogramm der Daten mit pdf vergleichen
  Schwierig kleine Abweichungen zu erkennen
- Einfacher: QQ-Plot – Theoretische Quantile gegen Empirische Quantile

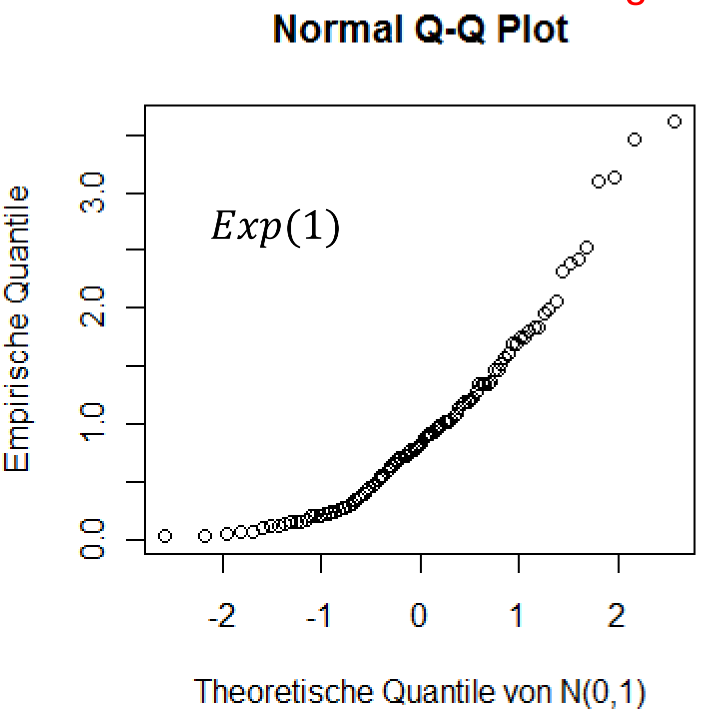
Gerade:

Normalverteilung OK



Krümmung:

Keine Normalverteilung



Reaktionszeit

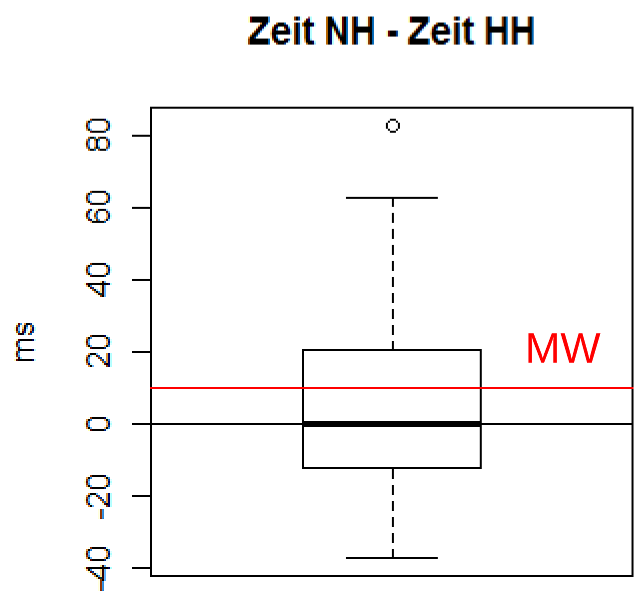
- Reagiert ein Rechtshänder mit rechts schneller als mit links ? (analog für Linkshänder)
- Experiment:
  - **Population:** Alle StudentInnen der VL
  Stichprobe: 50 **zufällige** StudentInnen angeschrieben

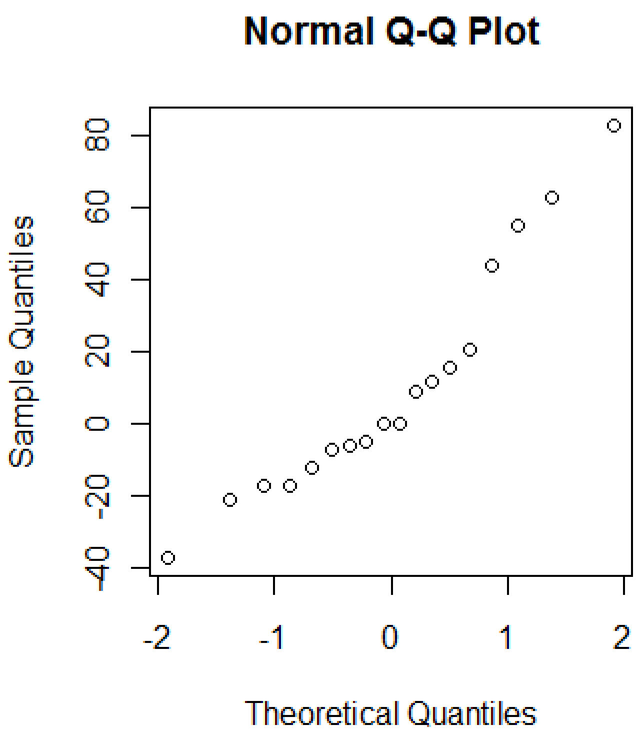
  - Reaktionszeittest online:
  http://www.bbc.co.uk/science/humanbody/sleep/sheep/
  - Mit jeder Hand einmal ausprobieren
  - Dann mit jeder Hand nocheinmal
  - **Reihenfolge randomisiert** (Geburtstag)
  - **Robust:** Bei beiden Messungen das beste und schlechteste Resultat streichen, dann mitteln und an mich senden
  - Berechne “Nebenhand – Haupthand”
  - Z.B.: Haupthand – 227 ms, Nebenhand – 248 ms
  Differenz = 248 ms – 227 ms = 21 ms

  - **Anreiz:** Verlose Kinogutschein unter Teilnehmern: Rücklauf erhöhen

Ergebnis

- 50 StudentInnen angeschrieben
- Rücklauf: 19
- Ein begründeter Ausreisser (Alkohol):
  18 verwertbare Antworten
- **Haupthand ist im Mittel 10 ms schneller**





Stichprobe vs. Population

- In der Stichprobe war die Haupthand im Mittel um 10 ms schneller

- Bedeutet das, dass die Haupthand
  auch in der ganzen Bevölkerung
  im Mittel schneller ist?

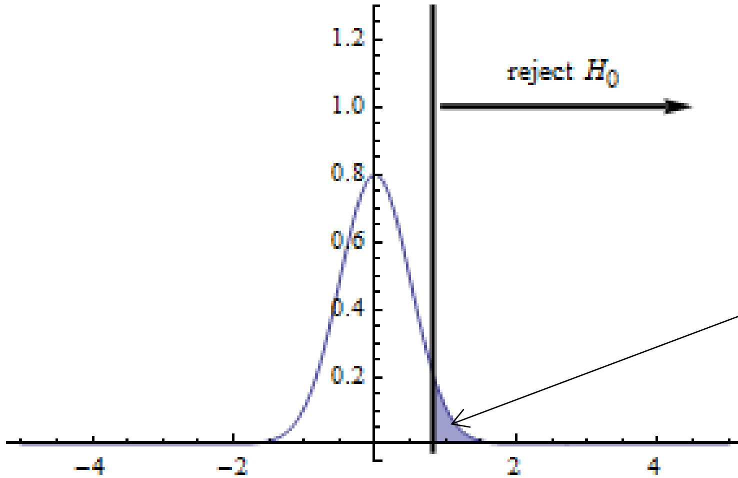
- Antwort darauf:
  z-Test, t-Test, Wilcoxon-Test, Vorzeichen-Test

z-Test: σ_X bekannt

1. **Modell:** X_i ist eine kontinuierliche Messgrösse;
   $X_1, \ldots, X_n iid$ $\boxed{\mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)}$, $\boxed{\sigma_X \, \text{bekannt}}$
2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \mu = \mu_0$,
   Alternative: $H_A: \ \mu \neq \mu_0$ (oder "$<$" oder "$>$")
3. **Teststatistik:**
   $$Z = \frac{(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_{\overline{X}_n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_X} = \frac{\text{beobachtet} - \text{erwartet}}{\text{Standardfehler}}.$$
   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
4. **Signifikanzniveau:** α
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**
   $$\begin{aligned} K &= \quad (-\infty, -\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})] \cup [\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}), \infty) \text{ bei } H_A: \ \mu \neq \mu_0, \\ K &= \quad (-\infty, -\Phi^{-1}(1-\alpha)] \quad \text{ bei } H_A: \ \mu < \mu_0, \\ K &= \quad [\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty) \quad \text{ bei } H_A: \ \mu > \mu_0. \end{aligned}$$
6. **Testentscheid:** Überprüfe, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt.

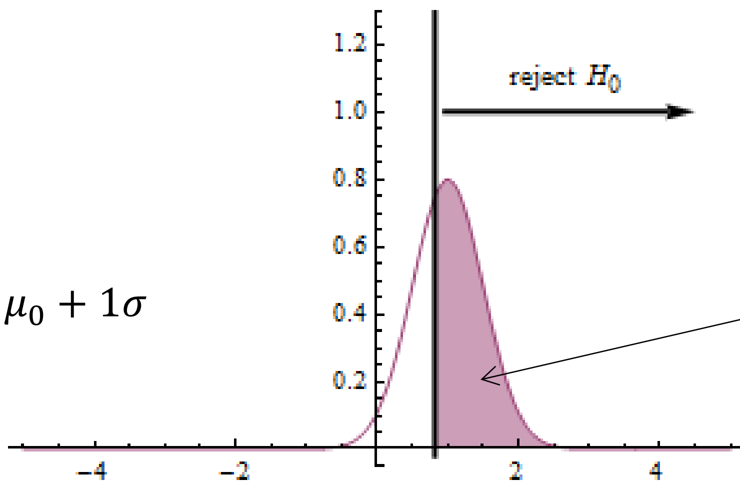
Wdh: Fehler 1. Art & Macht

H_0 wahr



Fehler 1. Art

Angenommen: $\mu = \mu_0 + 1\sigma$



Macht für

$\mu = \mu_0 + 1\sigma$

Problem in Praxis: $\boldsymbol{\sigma_X}$ ist unbekannt !

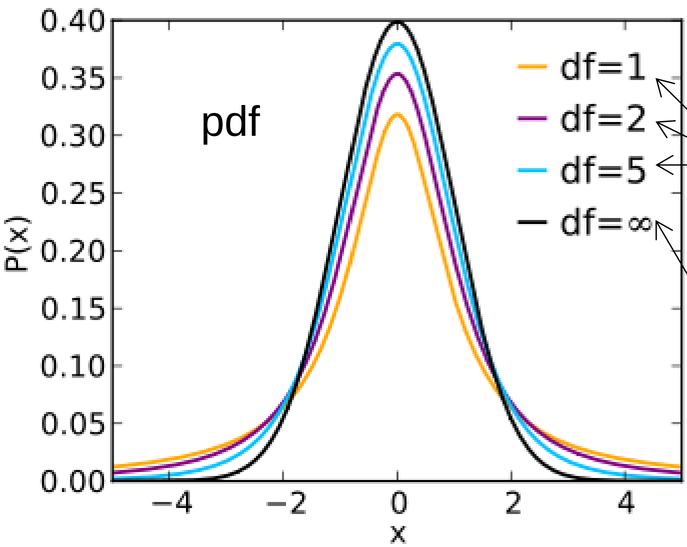
- Schätze Varianz: $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \overline{X}_n)$

- Neue Teststatistik: $T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}}$

- Verteilung von T, falls H_0 stimmt: $T \sim t_{n-1}$

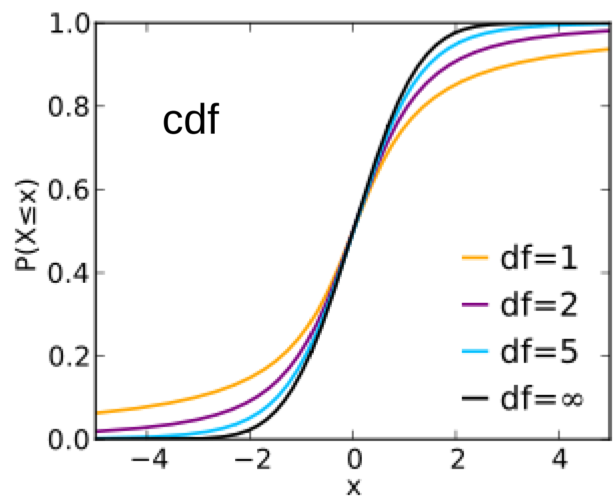
"Student's" t-Verteilung – Zoo Teil 3

- Annahme: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma_X^2)$ und unabhängig
- $\hat{\sigma}_X{}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$ ist geschätzte Varianz
- $T = (\bar{X}_n - \mu) / (\frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}})$ folgt einer
  't-Verteilung mit n Freiheitsgraden', $T \sim t_n$
- Werte sind tabelliert oder im Computer verfügbar
- Falls $n = \infty$: $t_n = N(0,1)$



Mehr Streuung = Unsicherheit

N(0,1)



t-Test: σ_X unbekannt

R: t.test

Macht: power.t.test

1. **Modell:** X_i ist eine kontinuierliche Messgrösse; $X_1, \ldots, X_n iid \boxed{\mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)}$, σ_X wird durch $\widehat{\sigma_X}$ geschätzt

2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \mu = \mu_0$,
   Alternative: $H_A: \ \mu \neq \mu_0$ (oder "$<$" oder "$>$")

3. **Teststatistik:**

$$T = \frac{(\overline{X}_n - \mu_0)}{\widehat{\sigma_{\overline{X}_n}}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_0)}{\widehat{\sigma_X}} = \frac{\text{beobachtet} - \text{erwartet}}{\text{geschätzter Standardfehler}}.$$

   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim \ t_{n-1}$

4. **Signifikanzniveau:** α

5. **Verwerfungsbereich fr die Teststatistik:**

$$\begin{aligned}
K &= \quad (-\infty, -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \text{ bei } H_A: \ \mu \neq \mu_0, \\
K &= \quad (-\infty, -t_{n-1;1-\alpha}] \quad \text{ bei } H_A: \ \mu < \mu_0, \\
K &= \quad [t_{n-1;1-\alpha}, \infty) \quad \text{ bei } H_A: \ \mu > \mu_0.
\end{aligned}$$

6. **Testentscheid:** Überprüfe, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt.

Annahmen und Ausblick

- Stichprobenvarianz bekannt (z-Test)
  → gelöst im t-Test
- Daten normalverteilt (z-Test, t-Test)
  → abgeschwächt im Wilcoxon Test
  → gelöst im Vorzeichentest
- Beobachtungen unabhängig und gleich verteilt
  → keine einfache Lösung

Vorzeichentest = Binomialtest

1. **Modell:**

   $$X_1, \ldots, X_n \quad iid,$$

   wobei X_i eine beliebige Verteilung hat.

2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \mu = \mu_0$, (μ ist der Median)
   Alternative: $H_A: \ \mu \neq \mu_0$ (oder einseitige Variante)

3. **Teststatistik:** V : Anzahl X_is mit $(X_i > \mu_0)$
   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $V \sim \ \mathrm{Bin}(n, \pi_0)$ mit $\pi_0 = 0.5$

4. **Signifikanzniveau:** α

5. **Verwerfungsbereich fr die Teststatistik:** $K = [0, c_u] \cup [c_o, n]$ falls $H_A: \mu \neq \mu_0$,
   Die Grenzen c_u und c_o mssen mit der Binomialverteilung oder der Normalapproximation berechnet werden.

6. **Testentscheid:** Entscheide, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich der Teststatistik liegt.

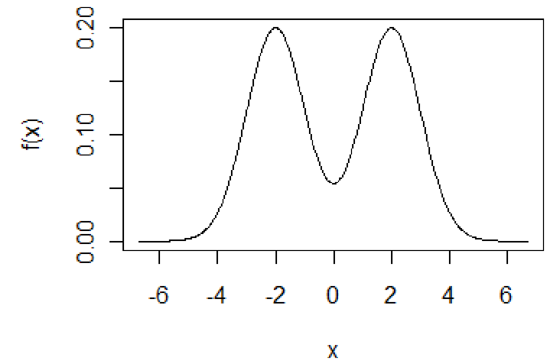
Bsp: Vorzeichentest

- Angenommen: $\mathrm{H}_0: \mu = \mu_0 = 10$, $H_A: \mu \neq 10$
- Beobachtet: $x_1 = 13, x_2 = 9, x_3 = 17, x_4 = 8, x_5 = 14$
- Vorzeichen von $x_i - \mu_0$: +, -, +, -, +
- Mache Binomialtest mit
  $H_0: \pi = 0.5$, $H_A: \pi \neq 0.5$, n=5, x=3 (Anzahl '+')

- Der Vorzeichentest kann genau dann verworfen werden, wenn der entsprechende Binomialtest verworfen wird.

- Vorteil: Keine Annahme an Verteilung
- Nachteil: Kleinere Macht

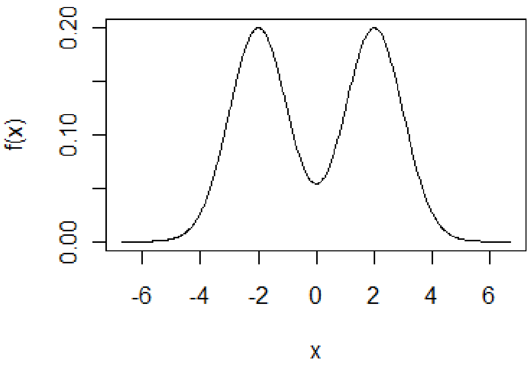
Wilcoxon-Test: Intuition



- Kompromiss zw. Vorzeichen- und t-Test
- Annahme: $X_i \sim F\ \ iid$, F ist symmetrisch
- Teste Median μ: $H_0: \mu = \mu_0$
  (einseitig oder zweiseitig)

- Intuition der Teststatistik
  - Rangiere $|x_i - \mu_0| \rightarrow r_i$
  - Gib Rängen ursprüngliches Vorzeichen von $(x_i - \mu_0)$ ("signed ranks")
  - Teststatistik T: Summe aller Ränge, bei denen $(x_i - \mu_0)$ positiv ist
- Falls H_0 stimmt, sollte diese Rangsumme nicht zu gross und nicht zu klein sein

Bsp: Wilcoxon-Test



- Bsp: H_0: $\mu_0 = 0$
- Beobachte -1.9, 0.2, 2.9, -4.1, 3.9
- Absolutbeträge: 1.9, 0.2, 2.9, 4.1, 3.9
- Ränge der Absolutbeträge: 2,1,3,5,4
- Rangsumme der posititven Gruppe: 1+3+4=8
  Minimale Rangsumme: 0
  Maximale Rangsumme: 1+2+3+4+5 = 15

- Mit dem Computer:

```
> wilcox.test(c(-1.9, 0.2, 2.9, -4.1, 3.9), mu=0)

 Wilcoxon signed rank test

data:  c(-1.9, 0.2, 2.9, -4.1, 3.9)
V = 8, p-value = 1
alternative hypothesis: true location is not equal to 0
```

Übersicht der Tests

Test	Annahmen				n_{min} bei $\alpha = 0.05$	Macht für ein Beispiel (1)
	σ_X bekannt	$X_i \sim N$	Symm. Verteilung	iid		
z	x	x	x	x	1	89 %
t		x	x	x	2	79 %
Wilcoxon			x	x	6	79 %
VZ				x	5	48 %

(1): $\mathrm{X_i} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), n = 10;\ H_0: \mu = 0; H_A: \mu \neq 0; \alpha = 0.05$

Macht berechnet für konkrete Alternative: $X_i \sim N(1,1)$