

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

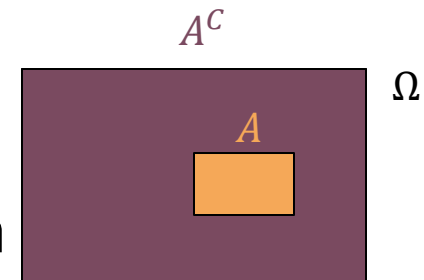
Statistik (Biol./Pharm.) – Herbst 2013



Wiederholung: Wa. Modell

- Grundraum Ω : Alle möglichen Elementarereignisse ω
Bsp: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\omega = 3$
- Ereignis “A”: Teilmenge des Grundraums
Bsp: $A = \{2,4,6\}$ (“gerade Zahlen”)
- Wahrscheinlichkeit: Axiome von Kolmogorov
 - $P(A) \geq 0$
 - $P(\Omega) = 1$
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls $A \cap B = \{\}$
- Mengenoperationen: Venn-Diagramm
- Wa. berechnen
 - Summe der Elementarereignisse
 - Günstige / Mögliche Fälle
 - Mengenoperationen / Venn Diagramm

Bsp: $P(A^c) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$

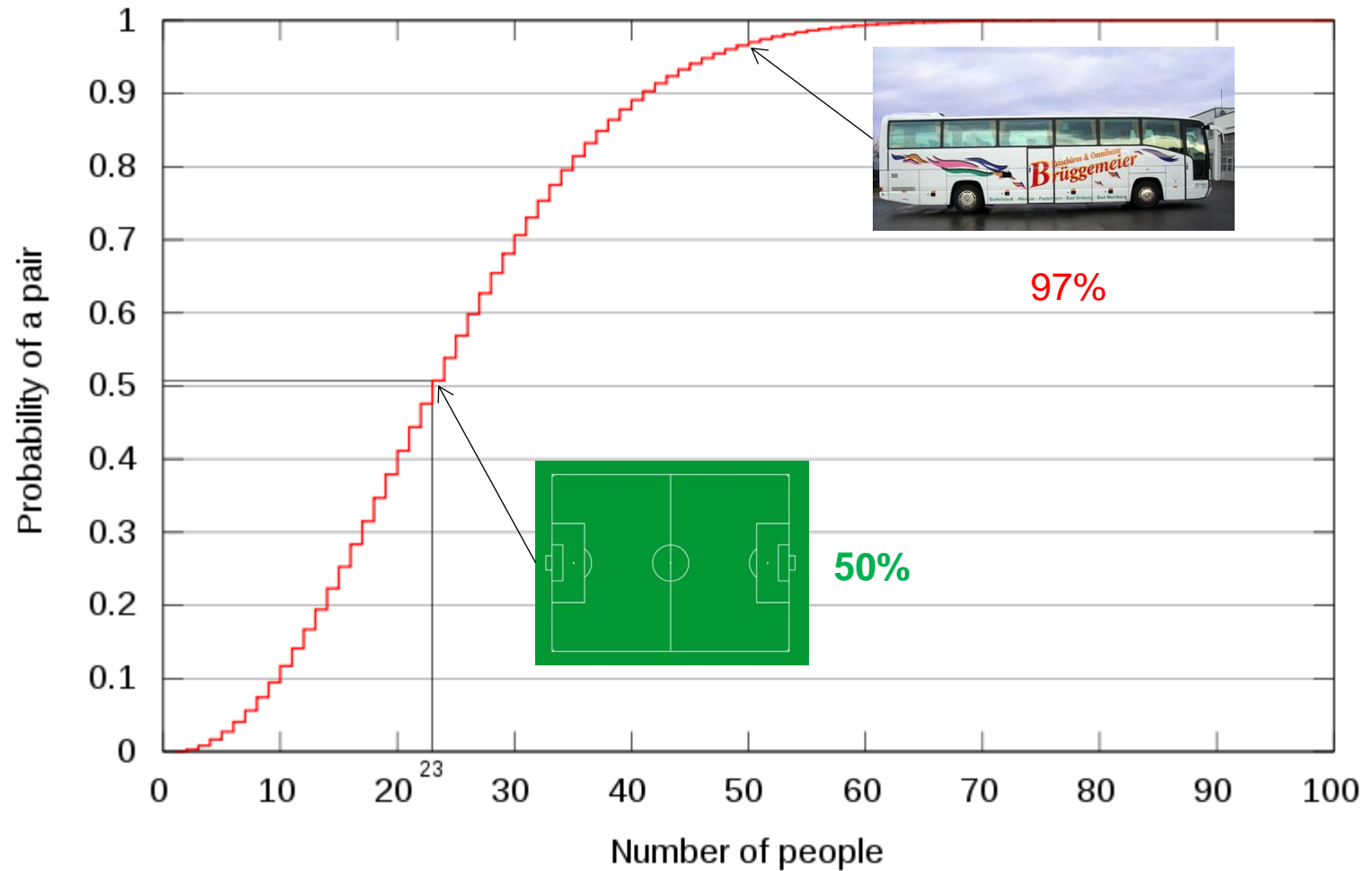


MAGIE

Geburtstagsparadox

- Ann.: Alle Geburtstage sind gleich wahrscheinlich
- Wie gross ist die Wa., dass in einer Gruppe von n Personen mind. 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?
- Ereignis A : Mind. 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag
- $P(A) = 1 - P(A^C)$
$$P(A^C) = \frac{365 * 364 * \dots * (365 - n + 1)}{365^n}$$
- Bsp mit $n=40$: $P(A) = 1 - \frac{365*364*\dots*326}{365^n} \approx 0.89$

Geburtstagsparadox

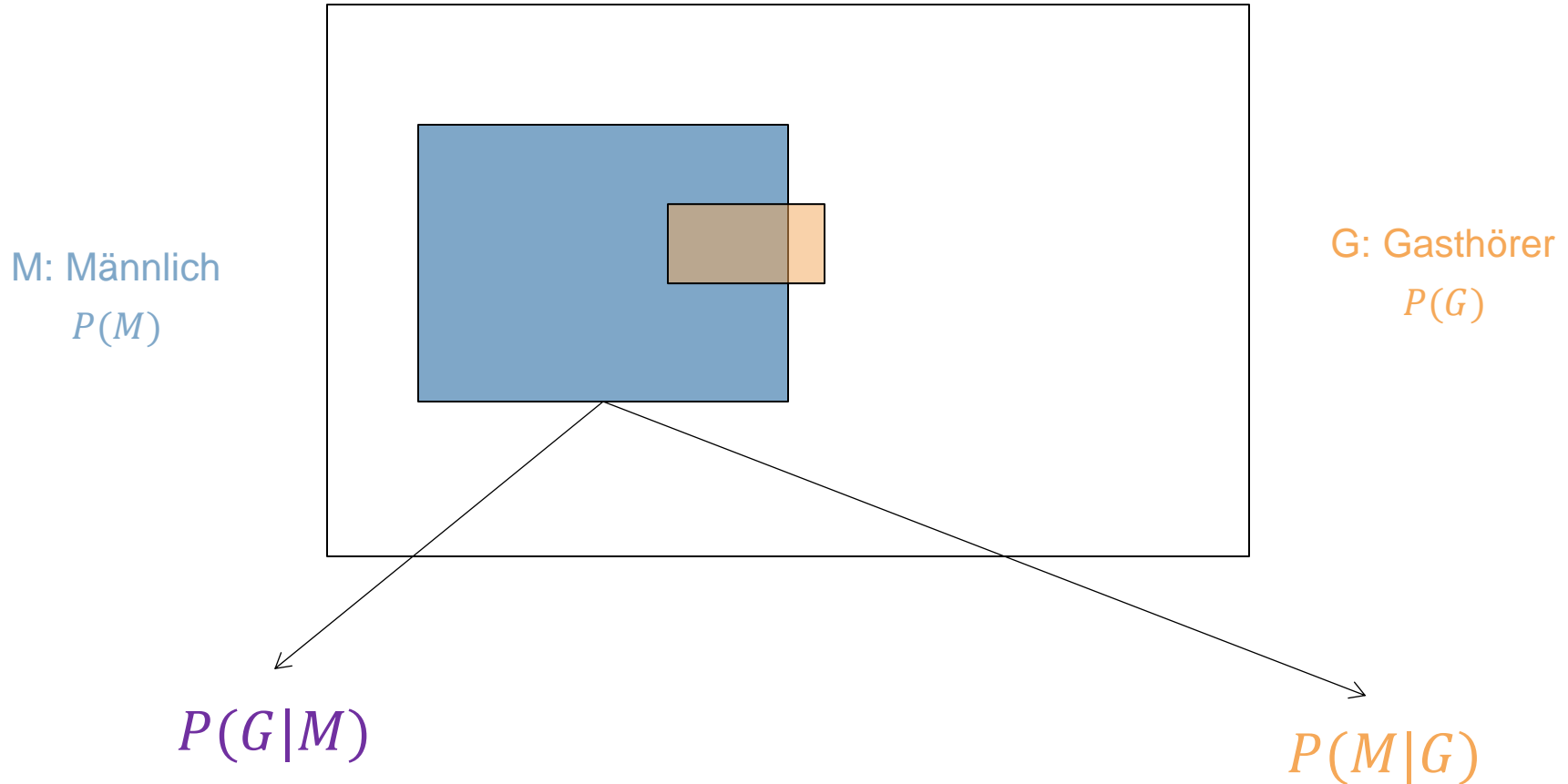


Abgezockt - Wollen Sie Informationen kaufen?

- Würfelspiel 100 mal (Runden):
 - Gerade AZ: Sie gewinnen 10 SFr
 - Ungerade AZ: Ich gewinne 10 SFr
- Jede Runde, nach dem Wurf und vor dem Aufdecken:
Sie dürfen 50 Rappen zahlen und
 - erfahren, ob $AZ \leq 3$ und
 - entscheiden, ob Sie diese Runde mitspielen wollen
- Lohnt es sich, für die Information zu zahlen?
- Enthält das Ereignis « $AZ \leq 3$ » Informationen über das Ereignis “Gerade AZ”?

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ω : Studenten dieser VL



Wa. für Gasthörer,
wenn ein Mann gewählt wurde

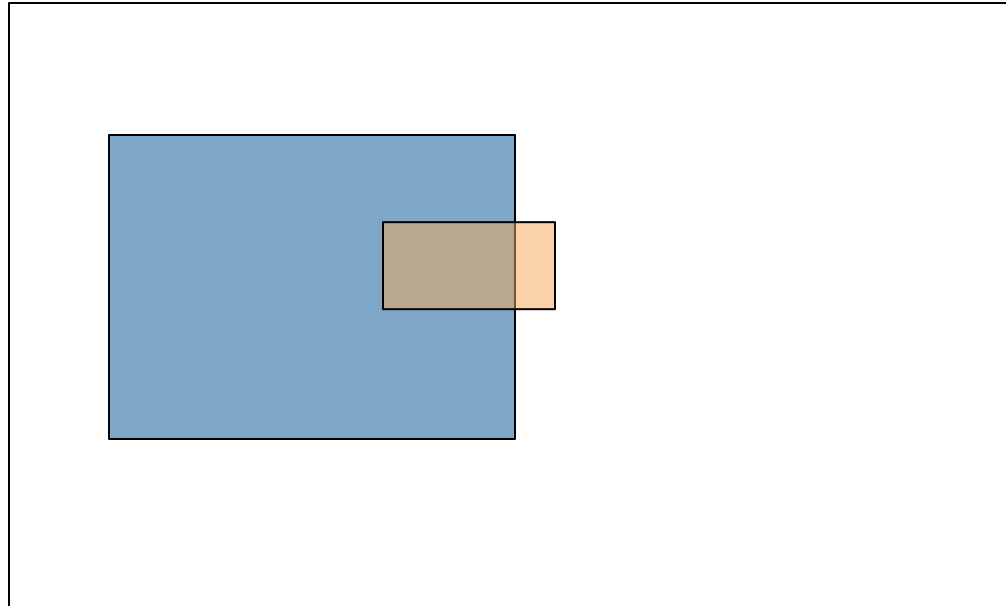
Wa. für Mann,
wenn Gasthörer gewählt wurde

Bedingte Wahrscheinlichkeit



Ω : Studenten dieser VL

M: Männlich
 $P(M)$



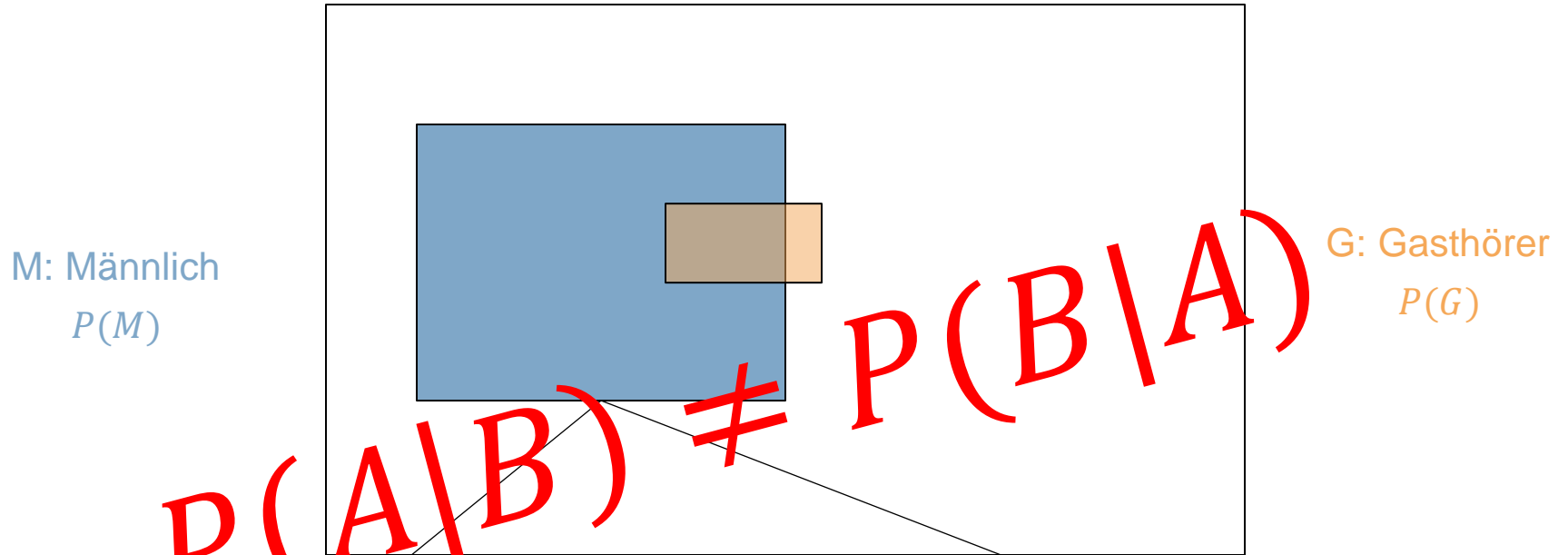
G: Gasthörer
 $P(G)$

Welche Aussage ist korrekt?

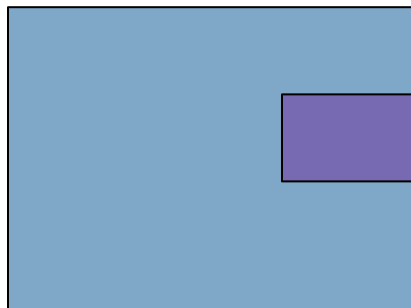
1. $P(M|G) = P(G|M)$
2. $P(M|G) > P(G|M)$
3. $P(M|G) < P(G|M)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ω : Studenten dieser VL



$P(G|M)$ klein



Neuer
Grundraum

$P(M|G)$ gross

Neuer
Grundraum



Brustkrebsstudie UK

- Seit 1988 in UK: Frauen über 50 machen Brustkrebstest
- Bsp: 2004/2005 wurden 1.7 Mio Tests gemacht
- Wa. für Brustkrebs: 0.01

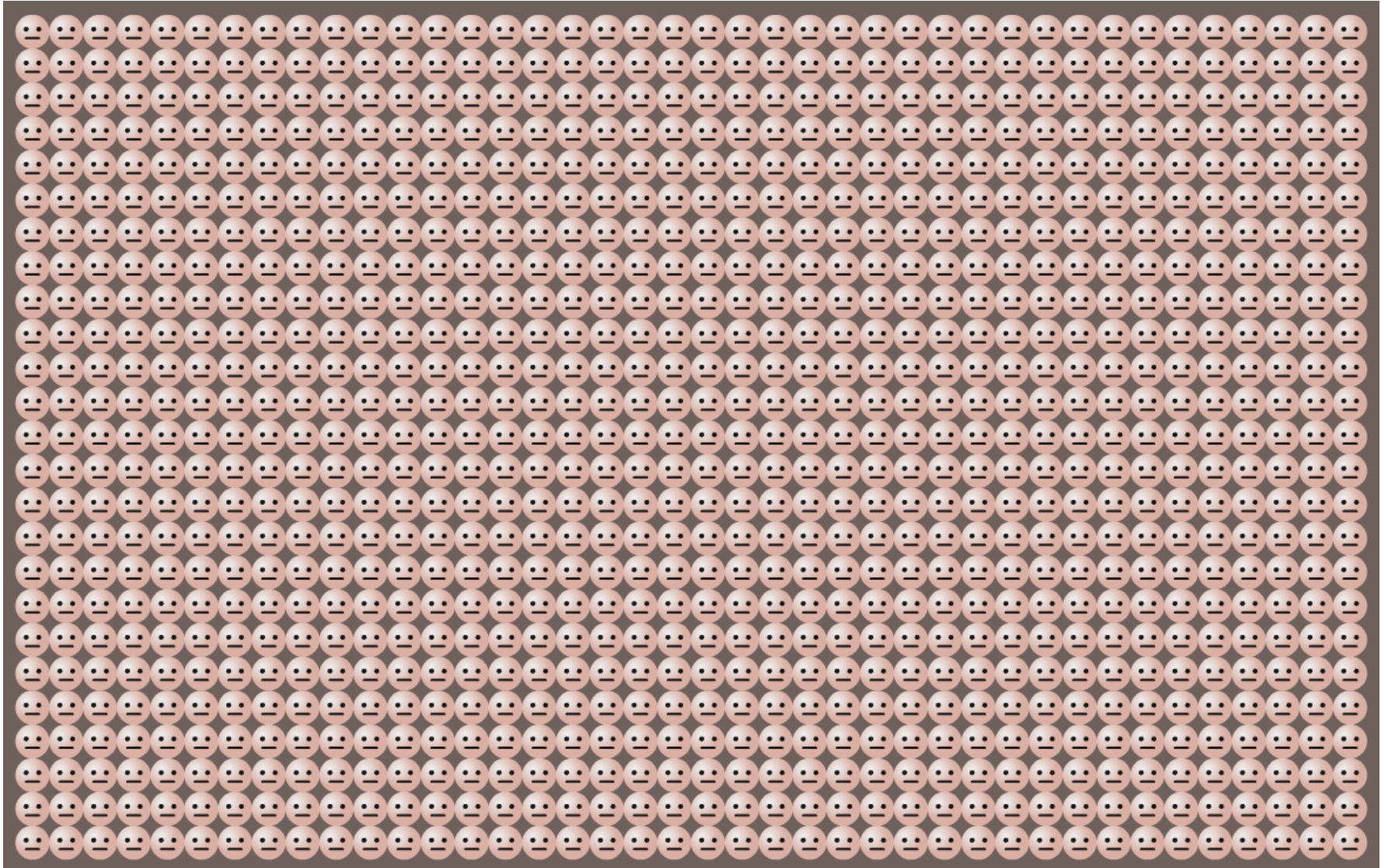
- Test positiv, falls krank: 0.85
- Test negativ, falls gesund: 0.9

- Angenommen, der Test von Frau Smith ist positiv.
Wie wahrscheinlich ist es, dass Frau Smith krank ist?

- <http://understandinguncertainty.org/node/182>

Brustkrebsstudie UK: Bsp mit 1000 Frauen

1000 Tests



Brustkrebsstudie UK: Bsp mit 1000 Frauen

108 positiv

892 negativ



Brustkrebsstudie UK: Bsp mit 1000 Frauen

108 positiv

892 negativ

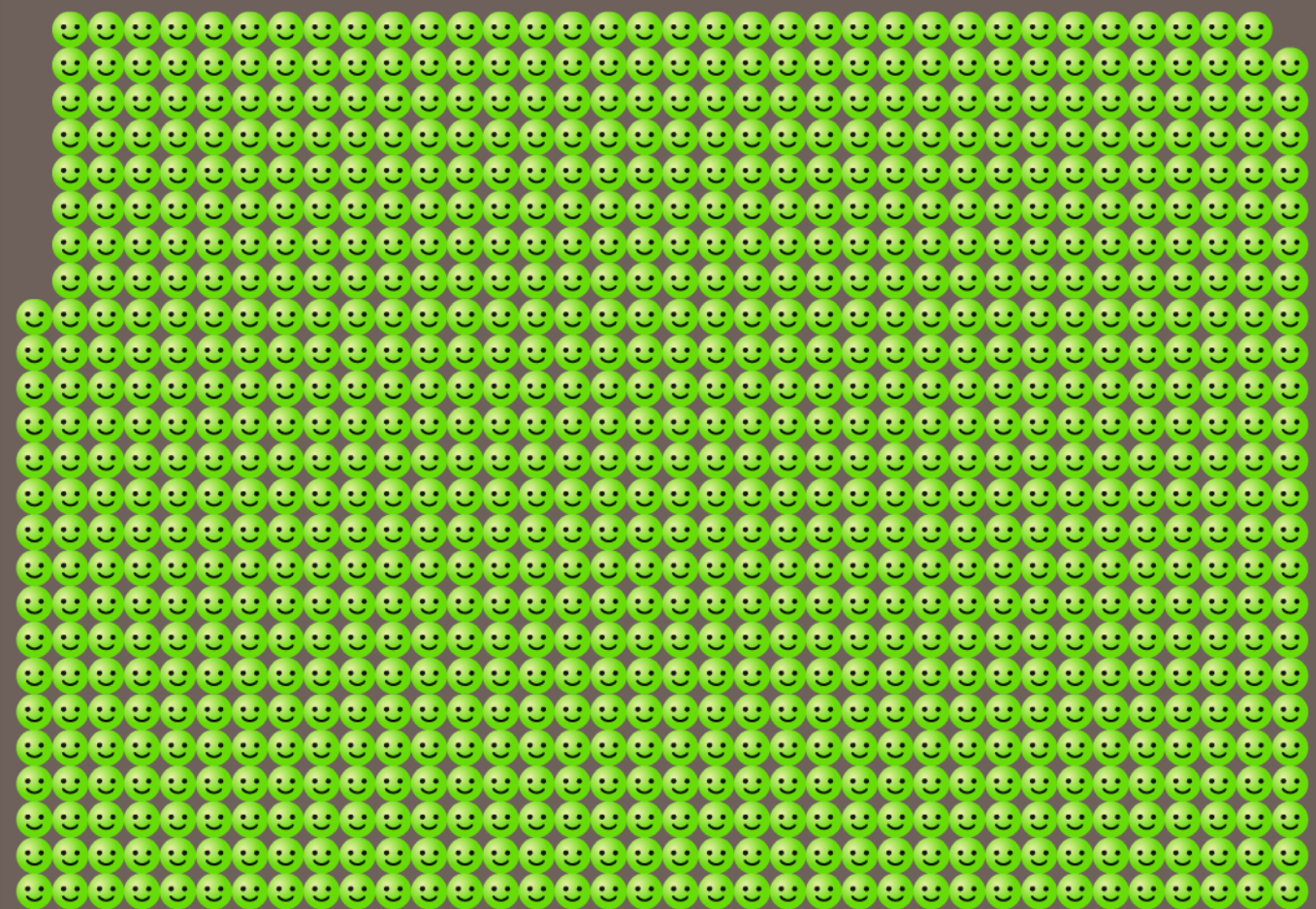
Von 108 positiv getesteten Frauen sind nur 9 krank (ca. 8%) !

krank



krank

gesund



gesund

Brustkrebsstudie UK: Erklärung

- K: Krank, T: Test positiv
- Gegeben: $P(K) = 0.01, P(T|K) = 0.85, P(T^c|K^c) = 0.9$
- Gesucht: $P(K|T)$

- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T|K)P(K) + P(T|K^c)P(K^c) = \\ &= 0.85 * 0.01 + 0.1 * 0.99 = 0.108 \end{aligned}$$

- $P(T^c) = 1 - P(T) = 0.892$

- Satz von Bayes:

$$P(K|T) = \frac{P(T|K)P(K)}{P(T)} = \frac{0.85 * 0.01}{0.108} = 0.08$$

- Gegeben der Test ist positiv, ist die Wa. wirklich krank zu sein nur 8% !

Publikationen verstehen: Odds und odds Ratio

- Rauchen und Lungenkrebs:
H.F. Dorn, «The Relationship of Cancer of the Lung and the Use of Tobacco», American Statistician, 1954

Two years ago cancer of the lung was an unfamiliar and little discussed disease outside the pages of medical journals. Today it is a common topic of discussion, apparently throughout the entire world. The newspapers, radio, television, popular magazines, business and trade journals vie with medical journals for the last word on the relationship of lung cancer and the use of tobacco. This topic has become the featured subject on the program of almost every up-to-date and alert organization interested in medical and health problems.

Datenlage: Studie von 1954

Aus: "Statistical Sleuth", Kap 18.1.3

	Lungenkrebs (L)	Kontrolle	Total
Raucher (R)	83	72	155
Nichtraucher	3	14	17
Total	86	86	172

- Alternative zu Wa.: odds, odds-Ratio (OR)

- $P(L|R) \approx \frac{83}{155} = 0.54$; $P(L|R^C) \approx \frac{3}{17} = 0.18$

- $odds(L|R) = \frac{P(L|R)}{P(L^C|R)} = \frac{P(L|R)}{1-P(L|R)} \approx \frac{0.54}{0.46} = 1.17$
 $odds(L|R^C) \approx 0.22$

- $OR = \frac{odds(L|R)}{odds(L|R^C)} = \frac{1.17}{0.22} = 5.33$

Unfaire Auswahl?

Wie genau?

“Die odds an Lungenkrebs zu erkranken sind für Raucher ca. 5 mal grösser.”

Rauchen und Lungenkrebs: Aktuelles Wissen

- Einfach verständliche Übersicht des aktuellen Wissens:
http://www.cdc.gov/cancer/lung/basic_info/risk_factors.htm
- “Cigarette smoking is the **number one risk factor** for lung cancer. In the United States, **cigarette smoking causes about 90% of lung cancers.**” [aus obiger Quelle]