

Serie 9

1. Ein Weinhändler behauptet, dass die von ihm gefüllten Weinflaschen mindestens 70 Zentiliter enthalten. Ein skeptischer Konsument vermutet aber, dass der Weinhändler zu wenig Wein abfüllt und will diese Behauptung überprüfen. Deshalb kauft er 12 Weinflaschen und misst ihren Inhalt. Er findet:

71, 69, 67, 68, 73, 72, 71, 71, 68, 72, 69, 72 (in Zentiliter).

Nehmen wir zunächst an, dass die Standardabweichung der Abfüllung im voraus bekannt ist. Sie beträgt $\sigma = 1.5$ Zentiliter.

- a) Da die Standardabweichung der Messungen bekannt ist, können wir einen z-Test durchführen. Führen Sie den (einseitigen; in welche Richtung?) Test auf dem 5%- Signifikanzniveau durch und formulieren Sie in einem Satz die Schlussfolgerung für den kritischen Konsumenten.
- b) Tatsächlich ist die Standardabweichung der Abfüllungen aber nicht bekannt. Man muss sie also aus den gemachten Stichproben schätzen:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \approx 1.96^2$$

Da nun die Standardabweichung geschätzt wurde und nicht mehr exakt bekannt ist, kann der z-Test nicht mehr durchgeführt werden. Verwenden Sie nun den t-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau. Was ändert sich an obigem Test? Wie lautet das Ergebnis?

- c) Nun zweifeln wir an, ob die Daten wirklich gut durch eine Normalverteilung beschrieben werden können (diese Annahme haben wir sowohl beim z- als auch beim t-Test gemacht). Wenn die Normalverteilungsannahme nicht gemacht werden kann, können wir den Vorzeichen-Test durchführen. Führen Sie also den Vorzeichen-Test auf dem 5%-Signifikanzniveau durch. Wie lautet nun das Ergebnis?
2. Im National Bureau of Standards (USA) wurden regelmässig Wägungen des 10-Gramm-Standardgewichtstücks durchgeführt. Bei 9 Wägungen erhielt man als durchschnittliche Differenz -403 Mikrogramm vom 10 Gramm-Sollgewicht und eine Standardabweichung von 3.127 Mikrogramm für eine einzelne Wägung.
- a) Geben Sie das exakte, zweiseitige 95%-Vertrauensintervall für die wahre Differenz an, unter der Annahme, dass die Messfehler normalverteilt sind.
- b) Könnte die wahre Differenz $-400.0\mu\text{g}$ betragen? Entscheiden Sie aufgrund des Resultats in Aufgabe a). (Kurze Begründung)

3. (Dies ist eine leicht abgeänderte Prüfungsaufgabe aus dem Sommer 2012)

F. Lauer möchte das Gerücht überprüfen, dass Blumen schneller wachsen, wenn man mit ihnen redet. Daher kauft sie acht identische Blumenzwiebeln, schickt jeweils zwei davon zu jedem ihrer vier Kinder und bittet sie, die beiden Blumenzwiebeln genau gleich zu behandeln. Mit dem einzigen Unterschied, dass sie nur mit der einen Blume reden sollen. Nach sechs Wochen erkundigt sie sich, wie hoch die Blumen gewachsen sind und erhält folgende Antworten (in cm):

Kind	1	2	3	4
Blume (beredet)	30.3	32.2	29.9	30.1
Blume (nicht beredet)	30.1	31.9	29.9	30.0

Nun möchte sie mit Hilfe dieser Daten herausfinden, ob an dem Blumengerede etwas dran ist und bittet Sie, einen geeigneten statistischen Test durchzuführen. Nehmen Sie an, dass die Differenzen Höhe Blume (beredet) minus Höhe Blume (nicht beredet) normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 sind.

- a) Es handelt sich um einen gepaarten Test. Warum?
- b) Geben Sie die Null- und die Alternativhypothese an und begründen Sie kurz Ihre Wahl.
- c) Geben Sie eine Schätzung $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz σ^2 der Differenz an (mit Lösungsweg).
- d) Führen Sie den geeigneten t -Test zum Niveau 0.05 durch: Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik T und dessen Verteilung unter der Nullhypothese, den Verwerfungsbereich für T und den Testentscheid. (Wenn Sie obige Aufgabe c) nicht lösen konnten, benutzen Sie im Folgenden $\hat{\sigma}^2 = \frac{5}{300}$.)
- e) Bestimmen Sie ein einseitiges 95%-Vertrauensintervall für μ .
- f) Sie sind der statistische Berater von F. Lauer und haben die Berechnungen durchgeführt. Was sagen Sie ihr nun?
- g) Angenommen, der Wert σ^2 wäre nicht aus den Daten geschätzt, sondern bekannt: Wie lautet dann das einseitige 95%-Vertrauensintervall? Geben Sie eine kurze Erklärung für den Unterschied zu e)!

Besprechung: Donnerstag, 14. November.

Abgabe: Die Übung kann auf freiwilliger Basis abgegeben werden - Bitte markieren Sie die Aufgaben, die korrigiert werden sollen.