Musterlösung zu Serie 4

1. Da $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda = 2$ gilt: $P(X = x) = \exp(-2)\frac{2^x}{x!}$.

a) $P(X = 0) = \exp(-2)\frac{2^0}{0!} = \exp(-2)\frac{1}{1} \approx 0.135$

b) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$0.135 + 0.271 + 0.271 + 0.180 \approx 0.857$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.857 \approx 0.143$.

d) Nach Kapitel 2.7.2 im Skript folgt: $Y \sim \text{Poisson}(6 \cdot \lambda) = \text{Poisson}(12)$.

2. Es gilt: $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, \pi)$ und $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, \pi)$; X_1 und X_2 sind unabhängig.

a) Da X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt:
$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2)$,
wobei $P(X_1 = x_1) = \binom{n_1}{x_1}\pi^{x_1}(1-\pi)^{n_1 - x_1}$ und $P(X_2 = x_2) = \binom{n_2}{x_2}\pi^{x_2}(1-\pi)^{n_2 - x_2}$.

b) $\log(P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2))$
$= \log(P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2))$
$= \log(P(X_1 = x_1)) + \log(P(X_2 = x_2))$
$= \log(\binom{n_1}{x_1}\pi^{x_1}(1-\pi)^{n_1 - x_1}) + \log(\binom{n_2}{x_2}\pi^{x_2}(1-\pi)^{n_2 - x_2})$
$= \log(\binom{n_1}{x_1}) + x_1 \cdot \log(\pi) + (n_1 - x_1) \cdot \log(1-\pi)$
$+ \log(\binom{n_2}{x_2}) + x_2 \cdot \log(\pi) + (n_2 - x_2) \cdot \log(1-\pi)$

c) $\frac{d}{d\pi}\{ \log(\binom{n_1}{x_1}) + x_1 \cdot \log(\pi) + (n_1 - x_1) \cdot \log(1-\pi)$
$+ \log(\binom{n_2}{x_2}) + x_2 \cdot \log(\pi) + (n_2 - x_2) \cdot \log(1-\pi)\}$
$= \frac{x_1}{\pi} - (n_1 - x_1) \cdot \frac{1}{1-\pi} + \frac{x_2}{\pi} - (n_2 - x_2) \cdot \frac{1}{1-\pi}$
$= \frac{x_1 + x_2}{\pi} - \frac{((n_1+n_2)-(x_1+x_2))}{1-\pi}$
Wenn wir diesen Ausdruck gleich Null setzen und nach π auflösen, erhalten wir:

$$\pi = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}.$$

Das Ergebnis ist also identisch mit dem Ergebnis, das wir erhalten hätten, wenn eine Person $30 + 50 = 80$ Lose gezogen hätte und dabei $2 + 4 = 6$ Gewinne gezogen hätte (da $X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, \pi)$).
Das hier gesehene Prinzip, einen Parameter zu schätzen, indem man mehrere unabhängige Beobachtungen kombiniert, ist die mit Abstand häufigste Schätzmethode in der Statistik.