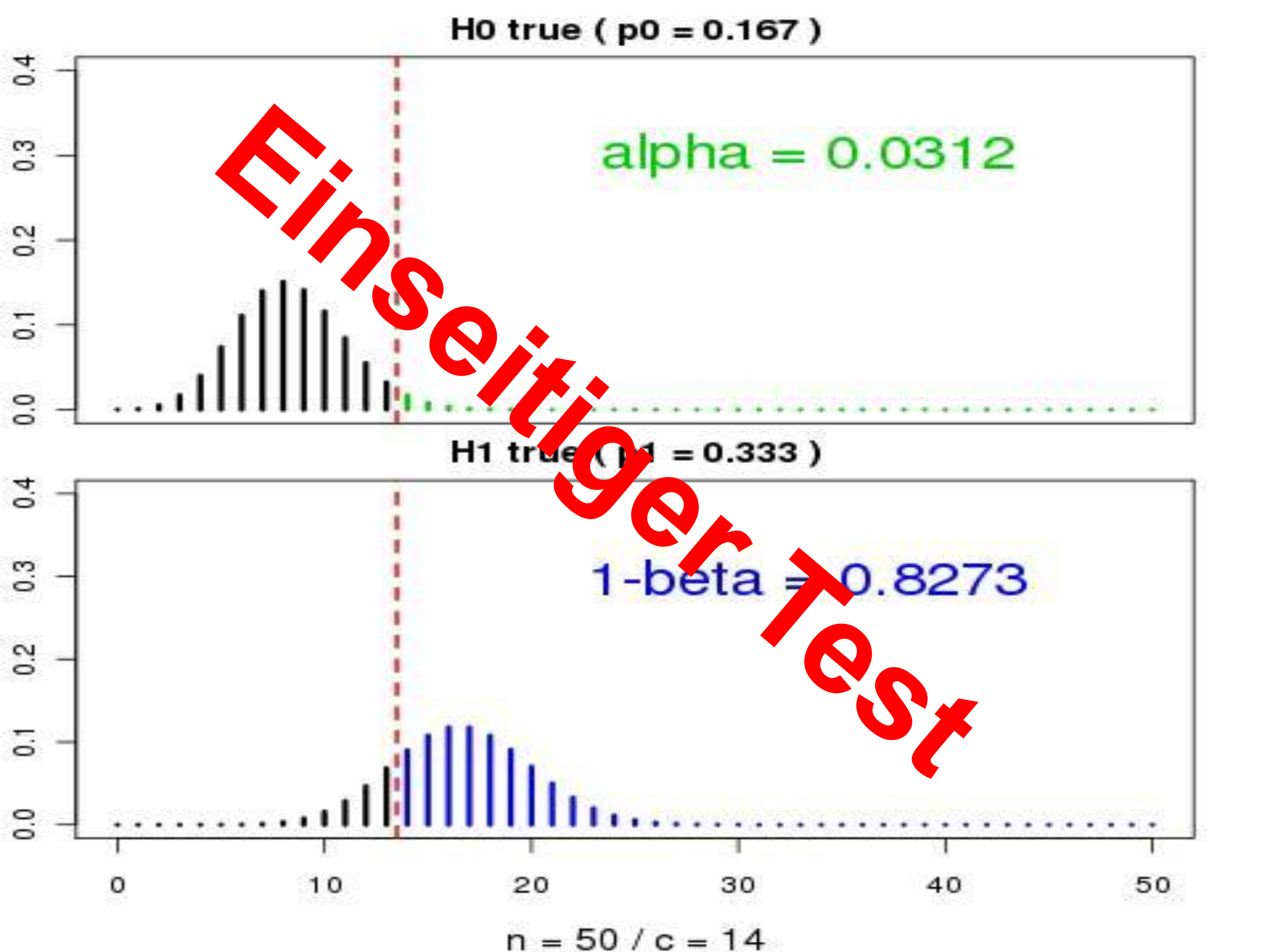
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

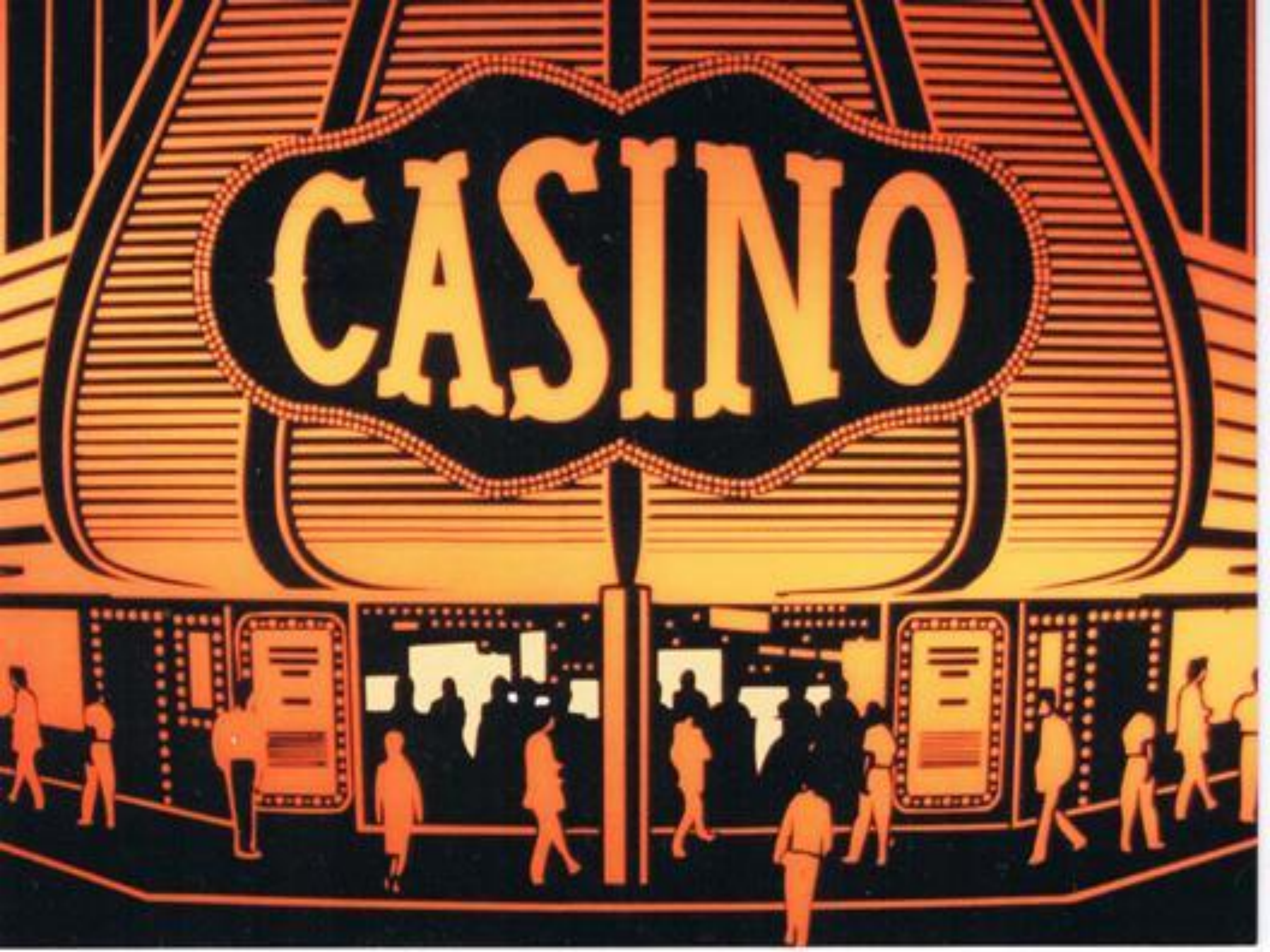
Binomialtest

Statistik (Biol./Pharm.) – Herbst 2012

Wdh: Zauberwürfel



Einseitiger Test
H0 true (p0 = 0.167)
alpha = 0.0312
H1 true (p1 = 0.333)
1-beta = 0.8273
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0
10
20
30
40
50
n = 50 / c = 14


CASINO

ANGEBOT

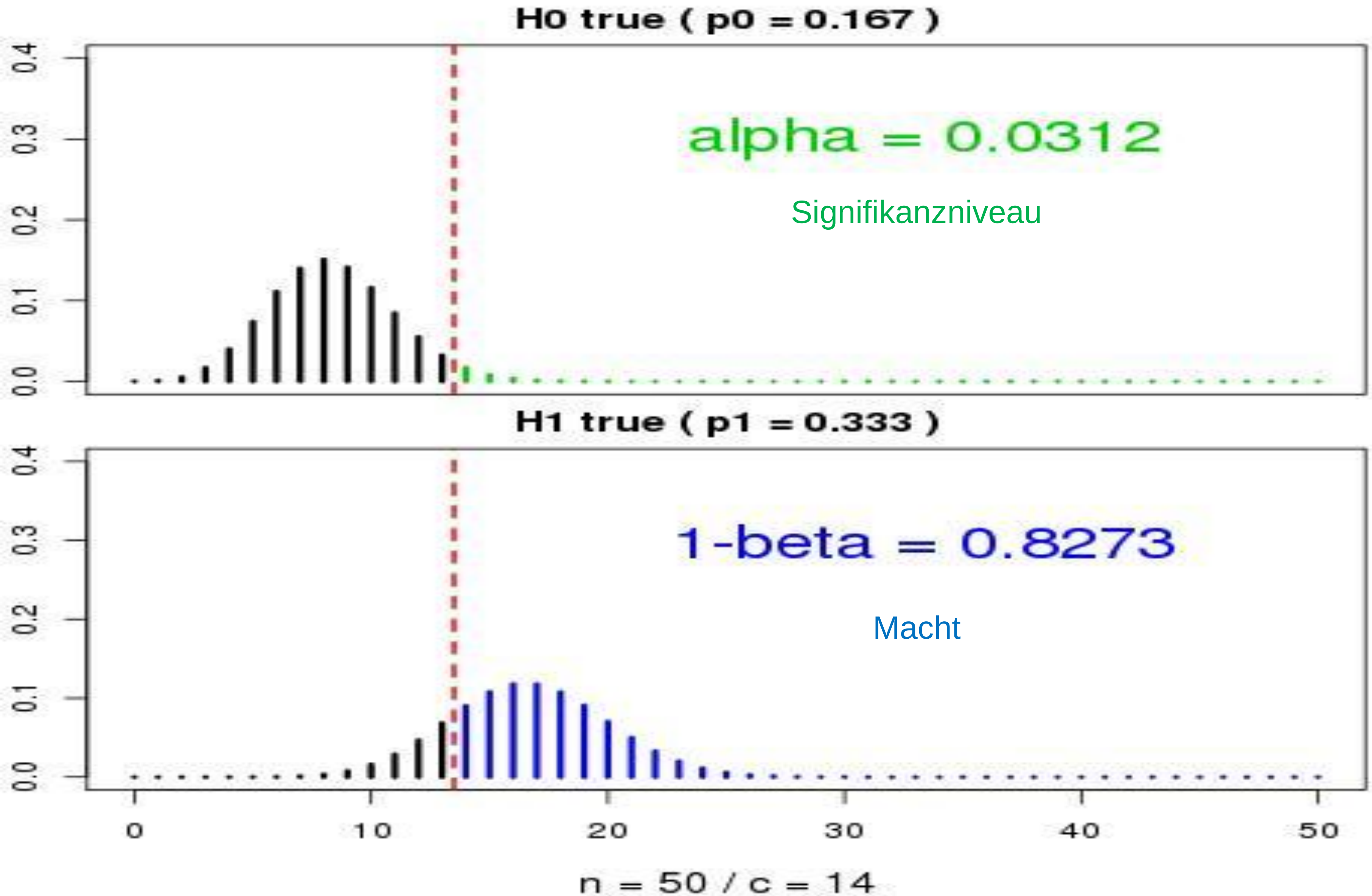
Sind Würfel fair?

0.5

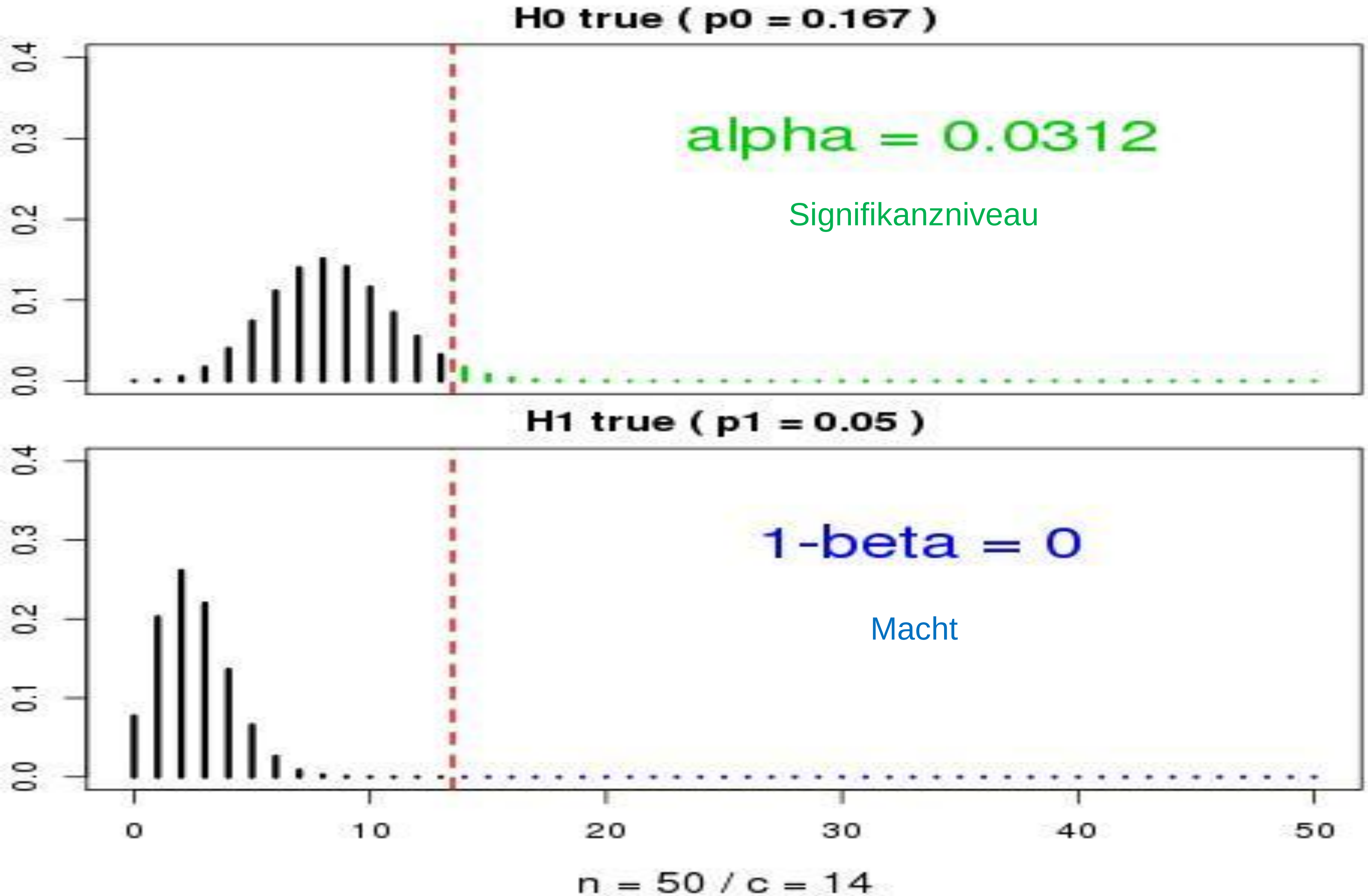
~~1~~ Dollar / Würfel

Vertreter

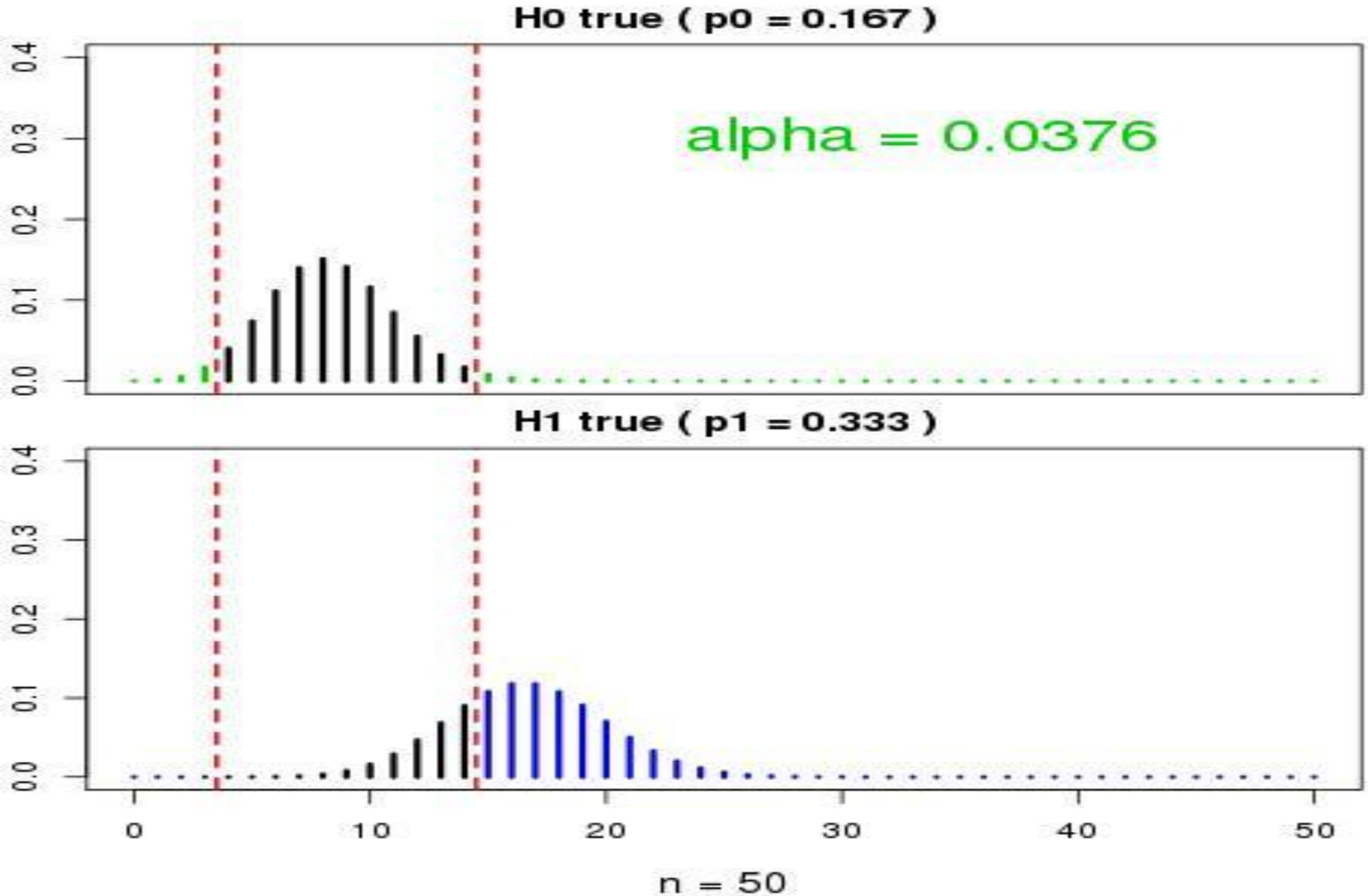
Einseitig – zu viele 6er



Einseitig – zu wenige 6er



Zweiseitig – zu viele 6er



Zweiseitig – zu viele 6er

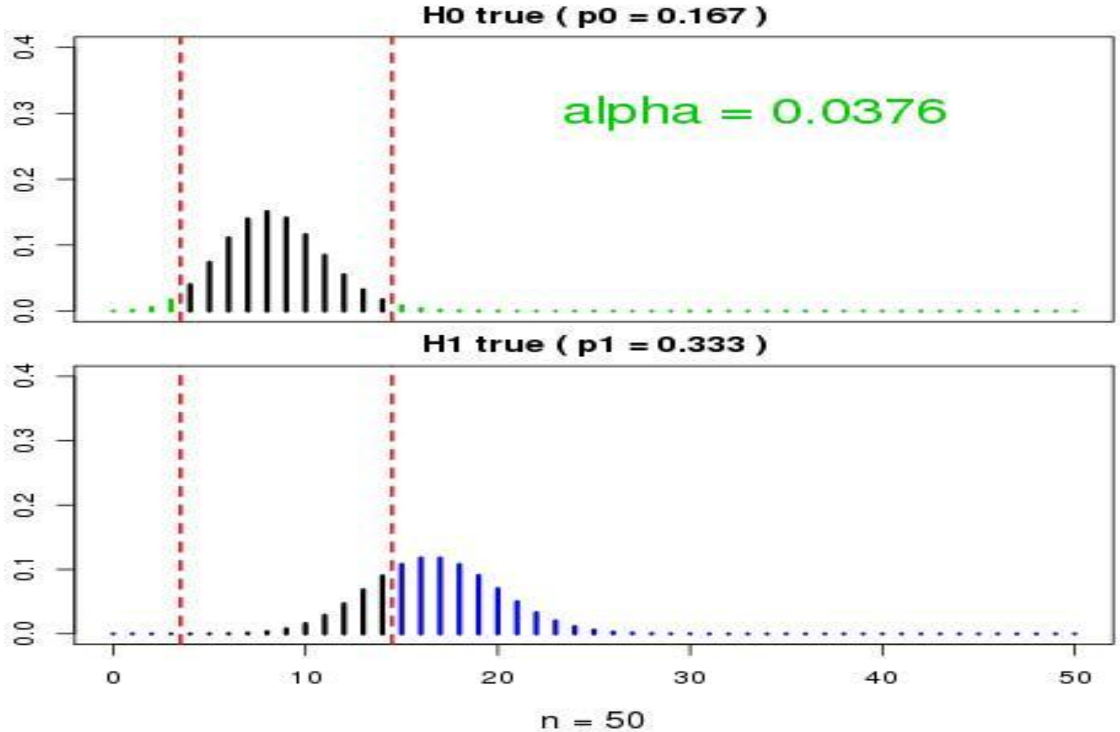
Stundenplan überblicken

Hörsäle finden

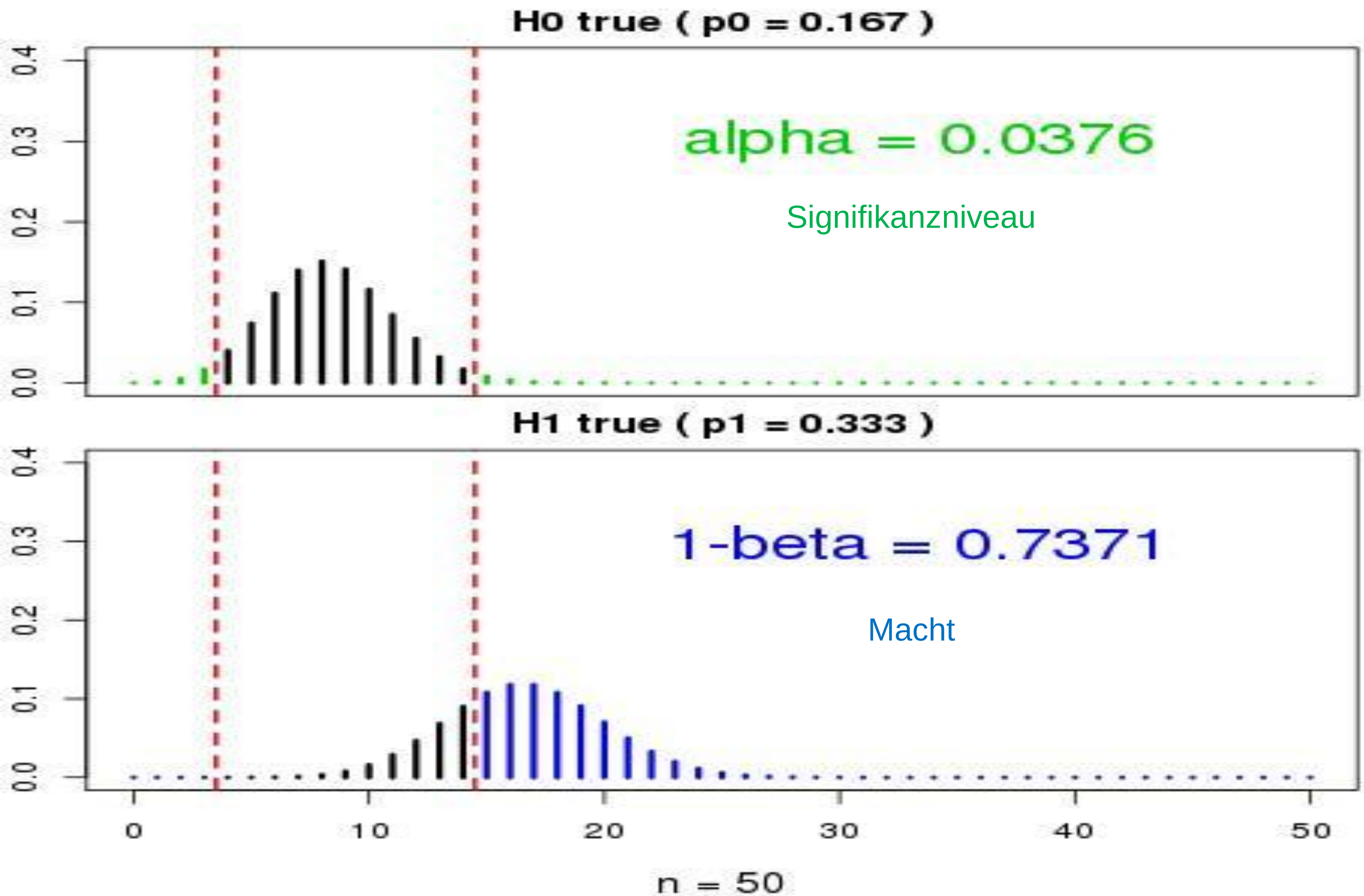
Lehrveranstaltungen interaktiv gestalten

Die Macht des zweiseitigen Tests bei gleichem Signifikanzniveau ist in diesem Beispiel

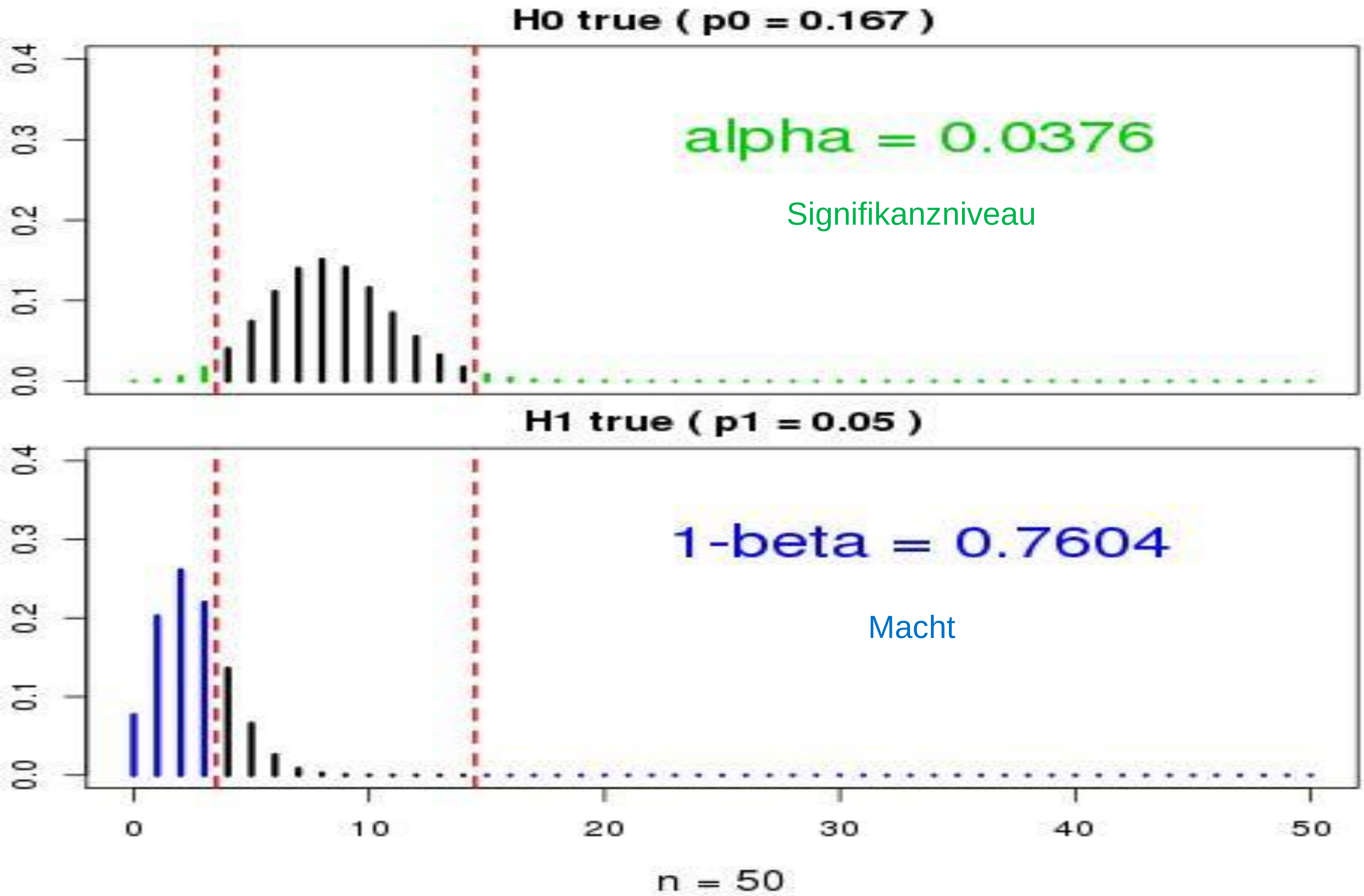
- grösser als beim einseitigen Test
- kleiner als beim einseitigen Test
- gleich wie beim einseitigen Test



Zweiseitig – zu viele 6er



Zweiseitig – zu wenige 6er



Zweiseitig vs. Einseitig

- **Einseitig:**

- Auf eine Seite blind

- Auf andere Seite sehr grosse Sehschärfe (grosse Macht)

- **Zweiseitig:**

- Sieht auf beide Seiten

- Sieht auf keiner Seite besonders gut (kleine Macht)

Der Binomialtest ganz formal:

1. Modell
2. Hypothesen
3. Teststatistik und Verteilung falls Nullhypothese stimmt
4. Signifikanzniveau
5. Verwerfungsbereich der Teststatistik
6. Testentscheid

Binomialtest 1/6: Modell

- X: Anzahl Erfolge bei n Versuchen
- $X \sim Bin(n, \pi)$

Binomialtest 2/6: Hypothesen

- Nullhypothese $H_0 : \pi = \pi_0$
- Alternative H_A: Drei Möglichkeiten
  - $\pi \neq \pi_0$ (zweiseitig) oder
  - $\pi > \pi_0$ (einseitig nach oben) oder
  - $\pi < \pi_0$ (einseitig nach unten)

Binomialtest 3/6: Teststatistik

- T: Anzahl Treffer bei n Versuchen
- Verteilung von T falls H_0 stimmt: $T \sim Bin(n, \pi_0)$

Brainpower !

Binomialtest 4/6: Signifikanzniveau α

- Konvention
- Meist: $\alpha = 0.05$

Binomialtest 5/6: Verwerfungsbereich für Teststatistik Teil 1 von 3

- Form vom Verwerfungsbereich:
  - $K = [0, c_u] \cup [c_0, n] \;\; falls\; H_A: \pi \neq \pi_0$
  - $K = [c_>, n] \;\; falls\; H_A: \pi > \pi_0$
  - $K = [0, c_<] \;\; falls\; H_A: \pi < \pi_0$
- Grenzen (c’s) werden bestimmt, sodass folgendes gilt:
  - $P(T \leq c_u) \approx \frac{\alpha}{2}$
  - $P(T \geq c_o) \approx \frac{\alpha}{2}$
  - $P(T \geq c_>) \approx \alpha$
  - $P(T \leq c_<) \approx \alpha$

Binomialtest 5/6: Verwerfungsbereich für Teststatistik Teil 2 von 3: Grenzen exakt

- Grenzen (c's) werden bestimmt, sodass folgendes gilt:
  - $P(T \leq c_u) \approx \frac{\alpha}{2}$
  - $P(T \geq c_o) \approx \frac{\alpha}{2}$
  - $P(T \geq c_>) \approx \alpha$
  - $P(T \leq c_<) \approx \alpha$
- Bsp: $T \sim Bin(10, 0.4)$ mit $\alpha = 0.05$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(T=t)	0.006	0.04	0.12	0.21	0.25	0.20	0.11	0.04	0.01	0.002	0.0001

- Aus Tabelle:
  - $c_u = 0$
  - $c_o = 8$
  - $c_> = 8$
  - $c_< = 1$

Binomialtest 5/6: Verwerfungsbereich für Teststatistik Teil 3 von 3: Grenzen approximativ

- Form vom Verwerfungsbereich:
  - $K = [0, c_u] \cup [c_0, n] \;\; falls \; H_A: \pi \neq \pi_0$
  - $K = [c_>, n] \;\; falls \; H_A: \pi > \pi_0$
  - $K = [0, c_<] \;\; falls \; H_A: \pi < \pi_0$
- "Normalapproximation" für $\alpha = 0.05$:
  - $\mathrm{c_u} = \mathrm{n}\pi_0 - 1.96\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}$ abrunden
  - $\mathrm{c}_o = \mathrm{n}\pi_0 + 1.96\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}$ aufrunden
  - $\mathrm{c}_> = \mathrm{n}\pi_0 + 1.64\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}$ aufrunden
  - $\mathrm{c}_< = \mathrm{n}\pi_0 - 1.64\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)}$ abrunden
- Approximation gut, falls n gross und π nicht nahe bei 0 oder 1 (genauere Faustregel: Siehe Skript)

Binomialtest 6/6: Testentscheid
Liegt beobachteter Wert von T in K?

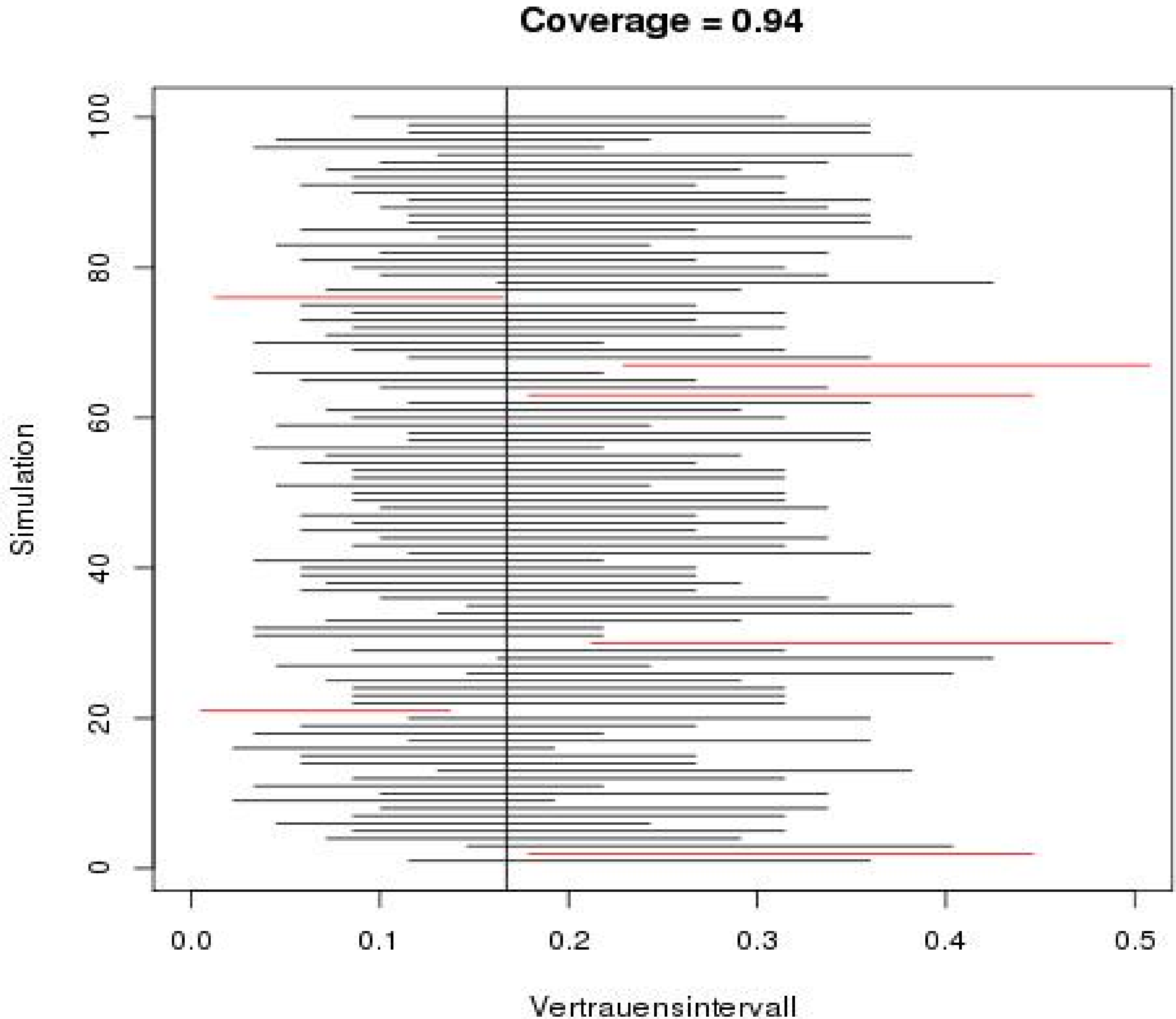
- Falls ja: H_0 kann auf dem Signifikanzniveau α verworfen werden
- Falls nein: H_0 kann auf dem Signifikanzniveau α **nicht** verworfen werden

P-Wert: Beispiel

Binomialtest, n=10, $H_0: \pi = 0.4$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(T=t)	0.006	0.040	0.12	0.21	0.25	0.20	0.11	0.042	0.01	0.002	0.0001

1. $H_A: \pi > 0.4$
   Angenommen, t=9 beobachtet
   $p = P(T \geq t) = P(T = 9) + P(T = 10) \approx 0.002 + 0.0001 = 0.0021$
2. $H_A: \pi < 0.4$
   Angenommen t=1 beobachtet
   $p = P(T \leq t) = P(T = 0) + P(T = 1) \approx 0.006 + 0.04 = 0.046$
3. $H_A: \pi \neq 0.4$
   Angenommen t=1 beobachtet
   $$p = P(T \in \{0,1,8,9,10\})$$
   $$\approx 0.006 + 0.040 + 0.01 + 0.002 + 0.0001 = 0.0581$$


Coverage = 0.94
Simulation
0
20
40
60
80
100
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Vertrauensintervall