Dieses Quiz soll Ihnen helfen, Kapitel 4.6 und 4.7 besser zu verstehen.

Frage 1

Angenommen, wir haben das Körpergewicht von 16 zufällig ausgewählten Personen in der Vorlesung bestimmt. Der Hersteller der Waage gibt an, dass jede Einzelmessung eine Standardabweichung von 0.2 kg hat. Wie gross ist Standardabweichung des arithmetischen Mittels der 16 Personen?

- ◯ 0.0125 kg

  Leider nicht.

- √ ◯ 0.05 kg

  Richtig!

- ◯ 0.2 kg

  Leider nicht.

- ◯ 0.8 kg

  Leider nicht.

- ◯ 3.2 kg

  Leider nicht.

- ◯ Weiss nicht.

  Danke für das Feedback!

Das arithmetische Mittel von n unabhängigen, gleichverteilten Messungen ist zuverlässiger als eine Einzelmessung. Genauer gesagt: Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels ist um den Faktor $\sqrt{n}$ kleiner als die einer Einzelmessung. In diesem Beispiel ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittels also $\frac{0.2}{\sqrt{16}} = 0.05$.

Frage 2

Angenommen, eine Einzelmessung X_i folgt der Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)$. Das arithmetische Mittel $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ aus n Einzelmessungen folgt der Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma_{\overline{X}_n}^2)$. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Standardabweichung einer Einzelmessung σ_X und der Standardabweichung des arithmetischen Mittels $\sigma_{\overline{X}_n}$?

○ $\sigma_{\overline{X}_n} = \sigma_X$

Leider nicht.

○ $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{n}$

Leider nicht.

√ ○ $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$

Richtig!

○ $\frac{\sigma_{\overline{X}_n}}{n} = \sigma_X$

Leider nicht.

○ $\frac{\sigma_{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}} = \sigma_X$

Leider nicht.

○ Weiss nicht.

Danke für das Feedback!

Das $\sqrt{n}$-Gesetz sagt, dass $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$. Es ist ein sehr verbreiteter Fehler, die Standardabweichung einer Einzelmessung mit der Standardabweichung des arithmetischen Mittels zu verwechseln. Versuchen Sie, sich diesen Unterschied einzuprägen.

Frage 3

Angenommen, das arithmetische Mittel ist folgendermassen verteilt: $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_{\overline{X}_n})$. Wie ist dann die Verteilung von $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}}$?

- ○ $\mathcal{N}(\mu, \sigma_{\overline{X}_n})$

  Leider nicht.

- ○ $\mathcal{N}(\mu, \sigma_X)$

  Leider nicht.

- ○ $\mathcal{N}(0, \sigma_X)$

  Leider nicht.

- ○ $\mathcal{N}(\mu, 1)$

  Leider nicht.

- √ ○ $\mathcal{N}(0, 1)$

  Richtig!

- ○ Weiss nicht.

  Danke für das Feedback!

Mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz erhalten wir: $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X}_n}} \sim \mathcal{N}((0, 1)$. Weil $\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ist die Aussage gleichbedeutend mit $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\sigma_X} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Diese Grösse wird beim z-Test als Teststatistik verwendet und somit ist die Verteilung der Teststatistik $\mathcal{N}(0, 1)$. Beim t-Test wird die Standardabweichung der Einzelbeobachtung σ_X durch einen Schätzwert $\hat{\sigma}_X$ ersetzt. Es sollte intuitiv klar sein, dass dadurch die Teststatistik etwas mehr streut (sie enthält ja jetzt mehr Unsicherheit als zuvor). Das hat zur Folge, dass die neue Teststatistik $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\cdot\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_X}$ nicht mehr standardnormalverteilt ist, sondern einer t_{n-1}-Verteilung folgt. Die t_{n-1}-Verteilung hat eine grössere Streuung als die Standardnormalverteilung und trägt somit der Tatsache Rechnung, dass in der Teststatistik zusätzliche Unsicherheit durch das *Schätzen* der Standardabweichung eingeführt wurde.

Frage 4

Angenommen, $X \sim t_5$ und $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Was ist grösser: $P(X > 2)$ oder $P(Z > 2)$ (Hinweis: Verwende die Tabellen im Skript.)?

○ $P(Z > 2)$

Leider nicht.

√ ○ $P(X > 2)$

Richtig!

○ Beide sind gleich.

Leider nicht.

○ Weiss nicht.

Danke für das Feedback!

Aus der Tabelle für die t-Verteilung sieht man: $t_{5;0.95} \approx 2$; d.h., $P(X \leq 2) \approx 0.95$. Also ist $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0.05$. Aus der Tabelle für die Standard-Normalverteilung sieht man: $\Phi^{-1}(0.975) \approx 2$. Also ist $P(Z \leq 2) \approx 0.975$. Deshalb ist $P(Z > 2) \approx 0.025$. $P(X > 2)$ ist also grösser. Allgemein gilt die Aussage: Je kleiner das n ("degrees of freedom") bei der Verteilung t_n, desto wahrscheinlicher sind Werte mit grossem Absolutbetrag. In der Finanz- und Versicherungsbranche ist die t-Verteilung sehr verbreitet, weil es hier sehr wichtig ist die Auftretenswahrscheinlichkeit von grossen Ereignissen (z.B. Schadensfällen) genau modellieren zu können.

Frage 5

Eine Stichprobe von 9 Einzelbeobachtungen ergibt das arithmetische Mittel $\bar{x}_n = 4$ und die empirische Standardabweichung einer Einzelbeobachtung $\hat{\sigma}_X = 2$. Berechne ein 95% Vertrauensintervall für den wahren Erwartungswert.

○ $[2.49; 5.51]$

Leider nicht.

√ ○ $[2.46; 5.53]$

Richtig!

○ $[2.76; 5.24]$

Leider nicht.

○ Weiss nicht.

Danke für das Feedback!

Das gesuchte Vertrauensintervall lässt sich mit der Formel $[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha/2}\ \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha/2}\ \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$ berechnen. In unserem Beispiel ist $n = 9$, $\alpha = 0.05$ und $t_{8;0.975} = 2.306$. Damit ergibt sich als 95% Vertrauensintervall: $[2.46; 5.53]$

Frage 6

Das (zweiseitige) 95%-Vertrauensintervall bei einem t-Test ist $[0.2; 1.5]$. Würde der t-Test mit den gleichen Daten die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ zu Gunsten der Alternative $H_A : \mu \neq 0$ verwerfen?

○ Nein.

Leider nicht.

√ ○ Ja.

Richtig!

○ Keine Aussage möglich.

Leider nicht.

○ Weiss nicht.

Danke für das Feedback!

Das 95% Vertrauensintervall enthält per Definition alle Werte von μ_0, bei denen der zweiseitige t-Test $H_0 : \mu = \mu_0$ auf dem 5% Niveau nicht verwerfen würde. Für alle Werte ausserhalb des Vertrauensintervalls würde die Nullhypothese verworfen werden. Da die 0 nicht im Vertrauensintervall liegt, würde also die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0$ verworfen werden.

Frage 7

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält ein 99%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert den wahren Erwartungswert?

○ Mit 1%.

Leider nicht.

○ Mit 5%.

Leider nicht.

○ Mit 95%.

Leider nicht.

√ ○ Mit 99%.

Richtig!

○ Weiss nicht.

Danke für das Feedback!

Ein 99%-Vertrauensintervall enthält den wahren Parameter mit 99% Wahrscheinlichkeit.

Frage 8

Angenommen, wir haben Grund zu der Annahme, dass die Daten in einer Stichprobe nicht normalverteilt sind (z.B. sehen wir eine starke Krümmung im QQ-Plot). Mit welchem Test kann man in diesem Fall die Lage der Verteilung prüfen (ein "Lagemass" ist z.B. der Mittelwert oder der Median)?

○ z-Test

Leider nicht.

○ t-Test

Leider nicht.

√ ○ Vorzeichentest

Richtig!

○ Weiss nicht.

Danke für das Feedback!

Sowohl der z-Test als auch der t-Test nehmen an, dass die Daten aus einer Normalverteilung stammen. Wenn das nicht der Fall ist, sind die resultierenden p-Werte falsch. In diesem Fall kann man immer noch den Vorzeichentest verwenden, denn dieser nimmt nur an, dass die Beobachtungen voneinander unabhängig sind. Über die Form der Verteilung gibt es aber gar keine Annahmen. Es gibt noch einen kleinen Unterschied: z-Test und t-Test prüfen den Mittelwert der Verteilung. Der Vorzeichentest prüft den Median der Verteilung.