

Dieses Quiz soll Ihnen helfen, Kapitel 4.4 bis 4.6 besser zu verstehen.

Frage 1

Z folgt einer Standard-Normalverteilung. Wie gross ist $P(Z = 1)$ (Achtung: $P(Z = 1)$ und $\phi(1)$ ist nicht das gleiche)?

0.84

Leider nicht. Sie haben $P(Z \leq 1)$ ausgerechnet.

0.24

Leider nicht. Sie haben $\phi(1)$ ausgerechnet.

✓ 0

Richtig!

Für jede stetige Zufallsvariable X mit einem kontinuierlichen Wertebereich gilt für jedes erlaubte Ergebnis x : $P(X = x) = 0$. Deshalb muss man das Konzept der Wahrscheinlichkeitsdichte einführen.

Frage 2

Betrachte eine kontinuierliche, uniforme Verteilung auf dem Intervall $[0, 2]$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte dieser Verteilung nennen wir $f(x)$. Wie gross sind die Werte $f(0), f(1), f(2)$?

$f(0) = 0, f(1) = 0.5, f(2) = 1$

Leider nicht.

✓ $f(0) = 0.5, f(1) = 0.5, f(2) = 0.5$

Richtig!

$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1$

Leider nicht.

Die Fläche unter jeder Wa.dichte muss den Wert 1 ergeben. Bei einer uniformen Verteilung ist die Wa.dichte für jeden Wert konstant. Weil das Intervall der erlaubten Werte eine Breite von 2 hat, muss die Wa.dichte also den Wert 0.5 annehmen, damit die Flächen unter der "Kurve" (hier ist es ja eigentlich nur eine horizontale Gerade) 1 ergibt.

Frage 3

Angenommen, X ist eine diskrete Zufallsvariable auf den Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ und Y ist eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wa.dichte $f(y)$ auf dem Bereich $[0, 1]$. X und Y haben jeweils eine unbekannte Verteilung und haben nichts miteinander zu tun. Welche der unten aufgelisteten Kombinationen kann niemals auftreten?

$P(X = 3) = 0.3; f(0.6) = 1.5$

Leider nicht. Diese Kombination ist möglich.

✓ $P(X = 3) = 1.3; f(0.6) = 0.5$

Richtig! Diese Kombination ist nicht möglich.

$P(X = 3) = 0.3; f(0.6) = 0.7$

Leider nicht. Diese Kombination ist möglich.

Bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariable X kann die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis x , also $P(X = x)$ niemals grösser als 1 sein (weil die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte von x zusammengezählt gerade 1 ergeben müssen). Der Wert einer Wa.dichte kann aber durchaus grösser als 1 werden, solange nur die Fläche unter der Wa.dichte 1 ergibt.

Frage 4

Angenommen, Z ist standard-normalverteilt. Wie gross ist $P(Z \leq 1.43)$? Verwenden Sie die Tabelle im Skript auf Seite 104.

0.53

Leider nicht.

✓ 0.92

Richtig!

0.97

Leider nicht.

Der gesuchte Wert steht in der Zeile "1.4" und in der Spalte "0.03": 0.9236

Frage 5

Angenommen, $X \sim \mathcal{N}(1, 2^2)$. Verwenden Sie die Tabelle im Skript auf Seite 104, um $P(X \leq 4.28)$ zu bestimmen. (Achtung: Sie müssen Standardisieren, um die Tabelle für die Standardnormalverteilung verwenden zu können.)

1

Leider nicht.

✓ 0.95

Richtig!

0.87

Leider nicht!

0.73

Leider nicht!

$$P(X \leq 4.28) = P\left(\frac{X-1}{2} \leq \frac{4.28-1}{2}\right) = P(Z \leq 1.64) = 0.95.$$

Frage 6

In der Tabelle im Skript sind nur die Wahrscheinlichkeiten für positive Werte von z eingetragen. Die Wahrscheinlichkeiten für negative Werte von z können durch die Symmetrie der Normalverteilung leicht berechnet werden. Wie gross ist $P(Z \leq -0.53)$?

0.7019

Leider nicht.

-0.7019

Leider nicht.

✓ 0.2981

Richtig!

Aus Symmetriegründen ist $P(Z \leq -0.53) = P(Z \geq 0.53) = P(Z > 0.53) = 1 - P(Z \leq 0.53)$ (Beachten Sie, dass $P(Z \geq 0.53) = P(Z > 0.53)$ weil $P(Z = 0.53) = 0$). Aus der Tabelle lesen wir $P(Z \leq 0.53) = 0.7019$. Also ist $P(Z \leq -0.53) = 1 - 0.7019 = 0.2981$.

Frage 7

X ist eine Zufallsvariable mit $E(X) = 1$ und $Var(X) = 2$. Durch lineare Transformation definieren wir eine neue Zufallsvariable $Y = 2 \cdot X + 1$. Wie gross ist $E(Y)$ und $Var(Y)$?

$E(Y) = 1, Var(Y) = 2$

Leider nicht.

$E(Y) = 3, Var(Y) = 5$

Leider nicht.

$E(Y) = 2, Var(Y) = 8$

Leider nicht.

✓ $E(Y) = 3, Var(Y) = 8$

Richtig!

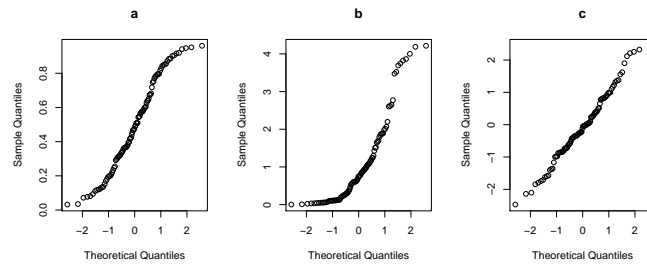
$E(Y) = 2, Var(Y) = 9$

Leider nicht.

Fall $Y = a + bX$, gelten die Rechenregeln: $E(Y) = a + b \cdot E(X)$, $Var(Y) = b^2 \cdot Var(X)$.

Frage 8

Betrachte die drei QQ-Plots, die drei verschiedenen Datensätzen mit der Standard-Normalverteilung vergleichen. Welche der drei QQ-Plots weist am ehesten darauf hin, dass der zugehörige Datensatz näherungsweise mit einer Normalverteilung modelliert werden kann?



a

Leider nicht.

b

Leider nicht.

✓ c

Richtig!

Der QQ-Plot, der Daten mit einer Standard-Normalverteilung vergleicht, zeigt eine Gerade, wenn die zugehörigen Daten zu einer (beliebigen) Normalverteilung passen. QQ-Plot "c" zeigt eine ziemlich klare Gerade; also können die zugehörigen Daten gut mit einer Normalverteilung modelliert werden.

Frage 9

(Optional; hier müssen Sie ein paar Zeilen aufschreiben) Ein betrunkenen Bar-gast ist zur Polizeistunde um 0.00 Uhr aus der Bar geworfen worden. Nun steht er schwankend auf der Strasse und will zu seinem Haus gehen, das am nördlichen Ende der Strasse liegt. Alle 6 Sekunden macht er entweder einen Schritt der Länge 1m nach Norden oder er bleibt sechs Sekunden lang schwankend stehen (er geht aber nicht seitlich oder zurück). Weil er aber so betrunken ist, macht er einen Schritt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ bleibt er stehen. Wir nehmen an, dass die Entscheidungen alle sechs Sekunden unabhängig voneinander sind. Um 1.00 Uhr ist der Mann noch nicht zu Hause und die alarmierte Polizei schickt einen Suchtrupp los. In welchem Bereich nördlich der Bar befindet sich der betrunkenene Mann mit 95% Wahrscheinlichkeit?

- [134; 517] Meter nördlich der Bar
Leider nicht.
- [287; 456] Meter nördlich der Bar
Leider nicht.
- ✓ [376; 424] Meter nördlich der Bar
Richtig!
- Exakt 400 Meter nördlich der Bar
Leider nicht.

X_i ist die Bewegung Richtung Norden bei Schritt i (positiv = Richtung Norden); $P(X_i = 1) = \frac{2}{3}$, $P(X_i = 0) = \frac{1}{3}$. Also ist $E(X_i) = \frac{2}{3}$ und $Var(X_i) = \frac{2}{9}$. Nach einer Stunde hat der Betrunkenene $60 \cdot 10 = 600$ Schritte gemacht. Also ist seine Position nach einer Stunde $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{600}$. Da wir angenommen haben, dass alle Schritte unabhängig voneinander und gleich verteilt sind, können wir den Zentralen Grenzwertsatz anwenden: $X \sim N(600 \cdot \frac{2}{3} = 400; 600 \cdot \frac{2}{9} \approx 133)$. Die Standardabweichung von X ist also $\sqrt{133} \approx 12$. Da bei einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ (ungefähr) 95% der Fläche im Bereich $\mu \pm 2 \cdot \sigma$ liegen, ist eine 95% Vertrauensintervall für die Position des Betrunkenenen: $[400 - 2 \cdot 12 = 376; 400 + 2 \cdot 12]$. Um 1.00 Uhr ist der Betrunkenene also mit 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich [376; 424] nördlich der Bar.