Dieses Quiz soll Ihnen helfen, Kapitel 2.5 - 2.6 besser zu verstehen.

Frage 1

Wir betrachten ein Würfelspiel. Man wirft einen fairen, sechsseitigen Würfel. Wenn eine 1 oder eine 2 oben liegt, muss man 2 SFr zahlen. Wenn eine 3 oder 4 oben liegt, muss man 1 SFr zahlen. Wenn eine 5 oder 6 oben liegt, bekommt man 3 SFr. Die Zufallsvariable X stellt den Gewinn des Spiels in SFr dar. Was ist die richtige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X?

○

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Leider nicht. Sie haben wohl die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns X mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahl verwechselt.

√ ○

x	-2	-1	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Richtig!

○

x	-2	-1	3
$P(X = x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

Leider nicht! Die eingetragenen Wahrscheinlichkeiten passen nicht zur Aufgabenstellung.

Die Zufallsvariable X kann die Werte -2, -1 und 3. Also müssen Werte für $P(X = -2)$, $P(X = -1)$ und $P(X = 3)$ definiert werden. $X = -2$ tritt genau dann ein, wenn das Ereignis A:"Eine 1 oder eine 2 liegt oben" eintritt. Man kann leicht berechnen, dass $P(A) = \frac{1}{3}$. Daher ist also $P(X = -2) = P(A) = \frac{1}{3}$. $X = -1$ tritt genau dann ein, wenn das Ereignis B:"Eine 3 oder eine 4 liegt oben" eintritt. Man kann leicht berechnen, dass $P(B) = \frac{1}{3}$. Daher ist also $P(X = -1) = P(B) = \frac{1}{3}$. $X = 3$ tritt genau dann ein, wenn das Ereignis C:"Eine 5 oder eine 6 liegt oben" eintritt. Man kann leicht berechnen, dass $P(C) = \frac{1}{3}$. Daher ist also $P(X = 3) = P(C) = \frac{1}{3}$.

Frage 2

X ist eine beliebige Zufallsvariable, die n verschiedene Werte x_1,...,x_n annehmen kann. Was ist $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$?

○ 0

Leider nicht!

√ ○ 1

Richtig!

○ ∞

Leider nicht!

○ 0.5

Leider nicht!

○ -1

Leider nicht! Eine Wahrscheinlichkeit ist immer grösser oder gleich null; also ist auch die Summe von Wahrscheinlichkeiten grösser oder gleich null. Die Antwort scheidet daher aus.

○ Kann man ohne weitere Angaben nicht lösen!

Leider nicht!

Für jede Zufallsvariable X gilt $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$. Das kann man leicht verstehen: Nennen wir die Ereignisse, die zu $X = x_i$ führen A_i. Für jedes Elementarereignis gibt es einen zugewiesenen Wert x_i. Also umfasst die Vereinigung aller A_i den ganzen Grundraum Ω (sonst gäbe es ein ω_i, dem die Zufallsvariable keine Zahl zuweist; das ist per Definition nicht erlaubt). Die verschiedenen A_i können aber untereinander keine Schnittmenge haben, denn sonst würde ein Elementarereignis auf mehr als eine Zahl abgebildet (das ist per Definition einer Funktion nicht erlaubt). Nach dem dritten Axiom von Kolmogorov ist also $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$. Per Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable gilt aber auch: $P(X = x_i) = P(A_i)$. Also folgt: $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Für Fragen 3-8 : X ist eine Zufallsvariable, die die Werte 0, 1 und 2 annehmen kann (z.B. mit dem Computer simuliert). Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist in folgender Tabelle angegeben:

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.5	0.2	0.3

Frage 3

Für Zufallsvariablen verwenden wir die Notation: Grossbuchstaben für die Funktion (z.B. X) und Kleinbuchstaben für einen konkreten Wert, den die Zufallsvariable annehmen kann (z.B. x). Wie schreibt man das Ereignis "Die Zufallsvariable X nimmt den Wert 3 an" korrekt?

○ $x = 3$

Leider nicht.

√ ○ $X = 3$

Richtig!

Frage 4

Was ist $P(X = 1)$?

○ 0.5

Leider nicht.

√ ○ 0.2

Richtig!

○ 0.3

Leider nicht.

Frage 5

Weshalb gilt $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$?

◯ Weil die Ereignisse $X = 0$ und $X = 1$ unabhängig sind.

Leider nicht. Wenn $X = 0$ eintritt, kann das Ereignis $X = 1$ nicht mehr eintreten und umgekehrt. Die beiden Ereignisse sind also abhängig. Selbst wenn sie abhängig wären, behandelt Unabhängigkeit nur Wahrscheinlichkeiten von Schnittmengen; hier handelt es sich aber um eine Vereinigung.

√ ◯ Weil die Ereignisse $X = 0$ und $X = 1$ disjunkt (d.h. leere Schnittmenge) sind.

Richtig!

◯ Die Formel stimmt gar nicht!

Leider nicht.

Das Ereignis $X \leq 1$ lässt sich auch als $X = 0 \cup X = 1$ schreiben. Die Zufallsvariable X kann nur einen Wert annehmen, also ist die Schnittmenge von $X = 0$ und $X = 1$ leer (d.h., die beiden Ereignisse sind disjunkt). Daher gilt mit dem dritten Axiom von Kolmogorov:
$P(X \leq 1) = P(X = 0 \cup X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

Frage 6

Was ist $P(X \leq 1)$?

◯ 0.5

Leider nicht.

√ ◯ 0.7

Richtig!

◯ 0.8

Leider nicht.

◯ 1

Leider nicht.

Frage 7

Wie gross ist $E(X)$?

√ ◯ 0.8

Richtig!

◯ 3

Leider nicht.

◯ 1

Leider nicht.

◯ Keine Aussage möglich!

Leider nicht.

Der Erwartungswert ist $E(X) = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 = 0.8$.

Frage 8

(Optional; hier müssen Sie kurz auf dem Papier rechnen) Wie gross ist $Var(X)$ etwa?

√ ◯ 0.76

Richtig!

◯ 0.80

Leider nicht. Das wäre der Erwartungswert.

◯ 3

Leider nicht.

◯ 1

Leider nicht.

◯ Keine Aussage möglich!

Leider nicht.

In der letzten Frage haben wir gesehen, dass der Erwartungswert 0.8 ist. Die Varianz ist
$Var(X) = 0.5(0 - 0.8)^2 + 0.2(1 - 0.8)^2 + 0.3(2 - 0.8)^2 = 0.76$.

Frage 9

Wir sind bei einem Abendessen mit Freunden insgesamt 8 Personen. Jeder stösst mit jedem einmal an. Wie oft klingen die Gläser?

- ◯ 16

  Leider nicht.

- √ ◯ 28

  Richtig!

- ◯ 36

  Leider nicht.

Wir müssen herausfinden, wie viele Gruppen mit zwei verschiedenen Personen man aus 8 Personen bilden kann. Die Reihenfolge innerhalb der Gruppen spielt keine Rolle. Die Antwort darauf liefert der Binomialkoeffizient: $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

Frage 10

Wir betrachten eine Gruppe aus 5000 Männern und 5000 Frauen. Es wird zufällig ein Team aus 10 Personen gebildet. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl Frauen in dem Team angibt. Richtig oder Falsch: $X \sim \text{Bin}(n = 10, \pi = 0.5)$

- ◯ Richtig, das Modell stimmt ganz genau.

  Leider nicht.

- √ ◯ Das Modell stimmt nicht perfekt, aber es ist eine sehr gute Näherung.

  Richtig!

- ◯ Das Modell stimmt nicht und ist auch nur eine unbrauchbare Näherung.

  Leider nicht.

Für die erste Person, die ausgewählt wird, ist die Wahrscheinlichkeit genau $\pi_1 = \frac{5000}{10000} = 0.5$, dass sie eine Frau ist. Angenommen, es wird eine Frau gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Person auch eine Frau ist, ist nun nur noch $\pi_2 = \frac{4999}{9999} = 0.499$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ändert sich also mit jeder gezogenen Person und ist von der vorhergehenden Wahl abhängig. Damit sind die beiden Grundannahmen der Binomialverteilung (konstante Erfolgswahrscheinlichkeit und unabhängige Gewinne) verletzt. Allerdings ändert sich die Erfolgswahrscheinlichkeit nur in der dritten Nachkommastelle. D.h., die Erfolgswahrscheinlichkeit bleibt *fast* identisch und ist *fast* unabhängig von der vorhergehenden Wahl. Daher ist die Binomialverteilung eine sehr gute Näherung für die Situation.

Frage 11

Wir betrachten eine Gruppe aus 2 Männern und 2 Frauen. Es wird zufällig ein Team aus 3 Personen gebildet. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl Frauen in dem Team angibt. Richtig oder Falsch: $X \sim \text{Bin}(n = 3, \pi = 0.5)$

- ○ Richtig, das Modell stimmt ganz genau.

  Leider nicht.

- ○ Das Modell stimmt nicht perfekt, aber es ist eine sehr gute Näherung.

  Leider nicht.

- √ ○ Das Modell stimmt nicht und ist auch nur eine unbrauchbare Näherung.

  Richtig!

Für die erste Person, die ausgewählt wird, ist die Wahrscheinlichkeit genau $\pi_1 = \frac{2}{4} = 0.5$, dass sie eine Frau ist. Angenommen, es wird eine Frau gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Person auch eine Frau ist, ist nun nur noch $\pi_2 = \frac{1}{3}$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ändert sich also mit jeder gezogenen Person erheblich und ist von der vorhergehenden Wahl abhängig. Damit sind die beiden Grundannahmen der Binomialverteilung (konstante Erfolgswahrscheinlichkeit und unabhängige Gewinne) verletzt. Die Änderung der Erfolgswahrscheinlichkeit ist so gross, dass die Binomialverteilung auch als Näherung nicht angebracht ist.