Serie 4

1. Die Zufallsvariable, die die Anzahl eingehender Telefonanrufe in einer Telefonzentrale innerhalb von 10 Minuten beschreibt, nennen wir X. Sie folgt einer Poissonverteilung mit Erwartungswert $\lambda = 2$, d.h. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer bestimmten 10-Minuten-Periode keinen einzigen Anruf gibt?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht mehr als drei Telefonanrufe in einer bestimmten 10-Minuten-Periode gibt?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als drei Telefonanrufe in einer bestimmten 10-Minuten-Periode gibt?

d) Angenommen, die Anzahl Anrufe in einer 10-Minuten-Periode ist von der Anzahl Anrufe in einer anderen 10-Minuten-Periode unabhängig. Die Zufallsvariable, die die Anzahl Anrufe in einer Stunde beschreibt bezeichnen wir mit Y. Welcher Verteilung folgt Y?

2. In der Vorlesung haben wir gesehen, wie man die Erfolgswahrscheinlichkeit π einer Binomialverteilung mit der Maximum-Likelihood-Methode schätzen kann, wenn man die Anzahl Versuche und die Anzahl Gewinne kennt. In dieser Aufgabe kombinieren wir mehrere solcher Beobachtungen zu einer Schätzung.

Angenommen Sie gehen über den Jahrmarkt und kaufen bei einer Losbude 30 Lose. Unter den 30 Losen sind 2 Gewinne. Am nächsten Tag erzählt Ihnen Ihr Studienkollege, dass er am Vorabend bei der gleichen Losbude 50 Lose gekauft hat und darunter 4 Gewinne hatte. Wie kombinieren Sie die beiden Ergebnisse, um mit der Maximum-Likelihood-Methode eine möglichst gute Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit zu erhalten?

a) Sei X_1 die Zufallsvariable, die die Anzahl Gewinne unter 30 Losen beschreibt ("Ihre" Gewinne). Wenn wir annehmen, dass jedes Los unabhängig von jedem anderen Los ein Gewinn oder eine Niete ist, dann folgt X einer Binomialverteilung mit $n_1 = 30$ und unbekanntem Erfolgsparameter π. Abgekürzt schreiben wir: $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, \pi)$. Analog sei X_2 die Zufallsvariable, die die Gewinne Ihres Kollegen beschreibt: $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, \pi)$ mit $n_2 = 50$ und dem gleichen Wert für die Erfolgswahrscheinlichkeit wie bei X_1. Angenommen, die Anzahl Gewinne, die Sie gezogen haben, ist unabhängig von der Anzahl Gewinne, die Ihr Kollege gezogen hat. Wie lässt sich dann $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2)$ schreiben?

b) Wie lässt sich $\log(P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2)$ schreiben? Versuche diesen Term in eine Summe mit mehreren Termen umzuschreiben. Welche Terme hängen von π ab und welche nicht?

c) Der Maximum-Likelihood-Schätzer für π ist derjenige Zahlenwert, der, wenn man ihn anstelle von π einsetzt, den grösstmöglichen Wert für $\log(P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2))$ (oder $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2)$; das ist egal, weil die Funktion log monoton ist) liefert. Finden Sie durch Ableiten und gleich Null setzen den Wert von π in Abhängigkeit von n_1, n_2, x_1 und x_2, der $\log(P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2))$ maximiert.

3. Verwende **R** um folgende Grössen zu berechnen.
Für Teilaufgaben a)-d) sei $X \sim \text{Bin}(50, 0.2)$.
Für Teilaufgaben e)-g) sei $X \sim \text{Poisson}(200)$ die Zufallsvariable, die die Anzahl Unfälle in einem Jahr beschreibt.

a) $P(X = 10)$

b) $P(X \leq 5)$

c) $P(X \geq 15)$

d) Finde c sodass $P(X \leq c) \approx 0.99$

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr genau 200 Unfälle passieren?

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr höchstens 210 Unfälle passieren?

g) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr zwischen 190 und 210 Unfälle passieren (beide Grenzen eingeschlossen)?

Besprechung: Donnerstag, October 11.

Abgabe: Übung nicht abgeben - wird nicht korrigiert.