Musterlösung zu Serie 6

1. **a)** Wir müssen $P[X \leq 1]$ berechnen im Falle von $\pi = 0.075$. Mit R machen wir dies mit `pbinom(1, 50, 0.075)` und erhalten 0.10. Wenn die Lieferung also nur 7.5% defekte Gläser enthält, so können wir dies mit unserem Test (mit 50 Proben) nur in ca. 10% der Fälle nachweisen!

b) Mit `pbinom(0:50, 150, 0.1)` sehen wir, dass der Verwerfungsbereich $K = \{X \leq 8\}$ ist. Wenn wir wie oben verfahren können wir nun

`pbinom(8, 150, 0.075)`

anwenden und erhalten 0.20. Dank der grösseren Stichprobe ist auch die Macht grösser geworden.

2. X sei die Anzahl Patienten, die auf die Behandlung ansprechen. Es gilt also $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 16$.

a) Gemäss Fragestellung haben wir $H_0 : \pi = 0.15$ und $H_A : \pi > 0.15$.
Der Verwerfungsbereich hat also die Form $K = [c, n]$.
Wir bestimmen c indem wir $P_{H_0}(X \in K)$ für verschiedene, grösser werdende c berechnen, so lange bis die entsprechende Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich 5% wird. Dabei benutzen wir, dass

$$P_{H_0}(X \geq c) = 1 - P_{H_0}(X \leq c - 1)$$

gilt.

```
> 1-pbinom(1,16,0.15)
[1] 0.7160988
> 1-pbinom(2,16,0.15)
[1] 0.4386207
> 1-pbinom(3,16,0.15)
[1] 0.2101093
> 1-pbinom(4,16,0.15)
[1] 0.0790513
> 1-pbinom(5,16,0.15)
[1] 0.02354438
```

Somit ist unser $c = 5 + 1 = 6$, d.h. der Verwerfungsbereich ist $K = [6, 16]$. Da 5 nicht im Verwerfungsbereich liegt, wird die Nullhypothese beibehalten.

b) Obigem R-Output entnehmen wir, dass bei $p = 0.0790513$ der Testentscheid von "Beibehalten" zu "Verwerfen" wechselt.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 verworfen wird, wenn die wahre Ansprechwahrscheinlichkeit $\pi = 0.3$ ist, berechnet sich wie folgt:

$$P_{\pi=0.3}(X \in K) = P_{\pi=0.3}(X \geq 6) = 1 - P_{\pi=0.3}(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{16}{k} 0.3^k 0.7^{16-k}.$$

Wir berechnen dies mit R:

```
> 1-pbinom(5,16,0.3)
[1] 0.3402177
```

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 0.3402177.

3. **a)** Wir benutzen folgende Notation: $R = \textit{Reise}$; $A = \textit{Absage}$.

$$P[3R\ 1A] = \binom{4}{3} \cdot 0.9^3 \cdot 0.1^1 = 0.2916 = 29.16\%$$

b) S_n sei der Anzahl Personen, die den Flug nehmen möchten. S_n ist binomialverteilt. Mit 28 Passagiere haben wir:

$$\begin{aligned} S_{28} &\sim Bin(28, 0.9) \\ \mathbf{E}[S_{28}] &= 28 \cdot 0.9 = 25.2 \\ \mathrm{Var}(S_{28}) &= 28 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 2.52 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P[\text{Zu viele Leute}] &= P[k = 27] + P[k = 28] \\ &= \binom{28}{27} \cdot 0.9^{27} \cdot 0.1^{1} + \binom{28}{28} \cdot 0.9^{28} \cdot 0.1^{0} \\ &= 0.1628 + 0.05233 = 0.215154 = 21.52\% \end{aligned}$$

d)
- Nullhypothese und Alternative

$$\begin{aligned} H_0 &: \pi = \pi_0 = \frac{801}{890} \\ H_A &: \pi \neq \pi_0 \end{aligned}$$

- Das Signifikanzniveau ist $\alpha = 0.05$.
- Verwerfungsbereich (Normalapproximation):

$$K = [0, c_u] \cup [c_o, n] = [0, 783.45] \cup [818.54, 890]$$

wobei

$$\begin{aligned} c_u &= n\pi_0 - 1.96\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)} \quad \text{abrunden} \\ c_o &= n\pi_0 + 1.96\sqrt{n\pi_0(1-\pi_0)} \quad \text{aufrunden} \end{aligned}$$

- Testentscheidung: ist die beobachtete Anzahl Personen am Flughafen in K? Ja, so wird die Nullhypohese deutlich verworfen.

4. **a)** Das 95% Vertrauensintervall ist gegeben durch $\frac{x}{n} \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}$. Mit x= Beobachtete Anzahl Gewinne und n= Anzahl Wiederholungen, finden wir $[0.0438, 0.2362]$.

b)
```
?binom.test
binom.test(7,50)
```
Das 95% Vertrauensintervall ist gegeben durch
```
95 percent confidence interval:
 0.0581917 0.2673960
```