

Musterlösung zu Serie 4

1. Da $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda = 2$ gilt: $P(X = x) = \exp(-2) \frac{2^x}{x!}$.

- a) $P(X = 0) = \exp(-2) \frac{2^0}{0!} = \exp(-2) \frac{1}{1} \approx 0.135$
- b) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.135 + 0.271 + 0.271 + 0.180 \approx 0.857$
- c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.857 \approx 0.143$.
- d) Nach Kapitel 2.7.2 im Skript folgt: $Y \sim \text{Poisson}(6 \cdot \lambda) = \text{Poisson}(12)$.

2. Es gilt: $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, \pi)$ und $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, \pi)$; X_1 und X_2 sind unabhängig.

a) Da X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt:

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2),$$

wobei $P(X_1 = x_1) = \binom{n_1}{x_1} \pi^{x_1} (1 - \pi)^{n_1 - x_1}$ und $P(X_2 = x_2) = \binom{n_2}{x_2} \pi^{x_2} (1 - \pi)^{n_2 - x_2}$.

- b) $\log(P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2))$
 $= \log(P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2))$
 $= \log(P(X_1 = x_1)) + \log(P(X_2 = x_2))$
 $= \log\left(\binom{n_1}{x_1} \pi^{x_1} (1 - \pi)^{n_1 - x_1}\right) + \log\left(\binom{n_2}{x_2} \pi^{x_2} (1 - \pi)^{n_2 - x_2}\right)$
 $= \log\left(\binom{n_1}{x_1}\right) + x_1 \cdot \log(\pi) + (n_1 - x_1) \cdot \log(1 - \pi)$
 $+ \log\left(\binom{n_2}{x_2}\right) + x_2 \cdot \log(\pi) + (n_2 - x_2) \cdot \log(1 - \pi)$

- c) $\frac{d}{d\pi} \left\{ \log\left(\binom{n_1}{x_1}\right) + x_1 \cdot \log(\pi) + (n_1 - x_1) \cdot \log(1 - \pi) \right.$
 $\left. + \log\left(\binom{n_2}{x_2}\right) + x_2 \cdot \log(\pi) + (n_2 - x_2) \cdot \log(1 - \pi) \right\}$
 $= \frac{x_1}{\pi} - (n_1 - x_1) \cdot \frac{1}{1 - \pi} + \frac{x_2}{\pi} - (n_2 - x_2) \cdot \frac{1}{1 - \pi}$
 $= \frac{x_1 + x_2}{\pi} - \frac{(n_1 + n_2) - (x_1 + x_2)}{1 - \pi}$

Wenn wir diesen Ausdruck gleich Null setzen und nach π auflösen, erhalten wir:

$$\pi = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}.$$

Das Ergebnis ist also identisch mit dem Ergebnis, das wir erhalten hätten, wenn eine Person $30 + 50 = 80$ Lose gezogen hätte und dabei $2 + 4 = 6$ Gewinne gezogen hätte (da $X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, \pi)$).

Das hier gesehene Prinzip, einen Parameter zu schätzen, indem man mehrere unabhängige Beobachtungen kombiniert, ist die mit Abstand häufigste Schätzmethode in der Statistik.

3. a) `dbinom(x=10, size=50, prob=0.2) = 0.139819`
 b) `pbinom(q=5, size=50, prob=0.2) = 0.04802722`
 c) `1-pbinom(q=14, size=50, prob=0.2) = 0.06072208`
 d) `pbinom(q=0:20, size=50, prob=0.2)`
 Wähle Position, die etwa 0.99 gibt $\Rightarrow 17$.
 e) `dpois(x=200, lambda=200) = 0.02819773`
 f) `ppois(q=210, lambda=200) = 0.772708`
 g) `ppois(q=210, lambda=200) - ppois(q=189, lambda=200) = 0.5422097`