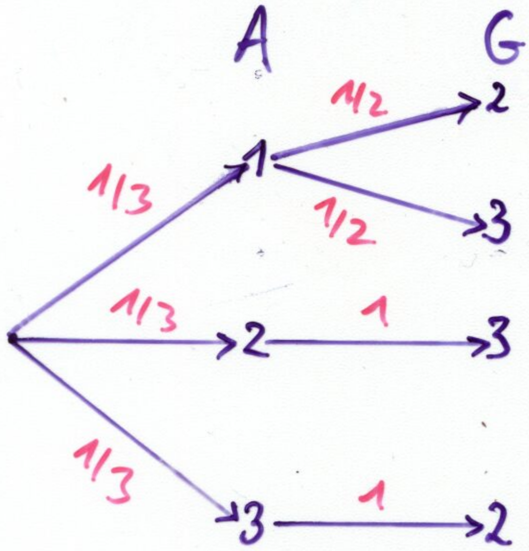
Monty - Hall Problem

(Ziegenproblem: 2 Ziegen, 1 Auto)

Wählen Tür 1; Monty öffnet Tür 3 mit Ziege

Zufallsvariable A: „Nummer von Tür mit Auto"

Zufallsvariable G: „Nummer von geöffneter Tür"



$$P(A=1 \cap G=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(A=1 \cap G=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(A=2 \cap G=3) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(A=3 \cap G=2) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Satz der totalen Wa.:

$$P(G=3) = P(A=1 \cap G=3) + P(A=2 \cap G=3) + P(A=3 \cap G=3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}$$

Definition bedingte Wa.:

$$P(A=2 \mid G=3) = \frac{P(A=2 \cap G=3)}{P(G=3)} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$$

$$P(A=1 \mid G=3) = \frac{P(A=1 \cap G=3)}{P(G=3)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

$\Rightarrow$ Es lohnt sich zu wechseln!

Wiederholung: Zufallsvariable X

Funktion: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$; $X: X(A) = x$

Konvention: Grossbuchstabe (z.B. X) = Funktion

Kleinbuchstabe (z.B. x) = konkreter Wert

$$P(X=x) = P(\{\omega \mid X(\omega)=x\}) \;;\; \sum_{\text{alle } x} P(X=x) = 1$$

Bsp: Würfelspiel

A: „AZ=1" ⇒ −3 SFr

B: „AZ ∈ {2,3,4}" → 0 SFr

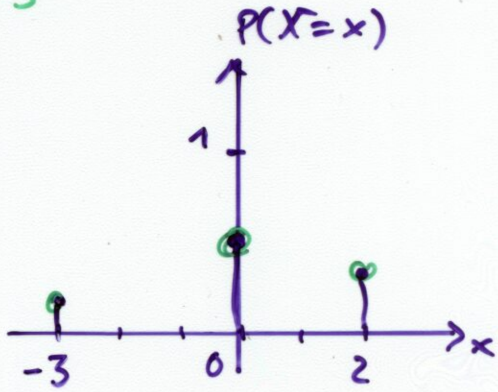
C: „AZ ∈ {5,6}" ⇒ 2 SFr

$P(A) = 1/6$; $P(B) = 1/2$; $P(C) = 1/3$

X: Gewinn nach einem Wurf

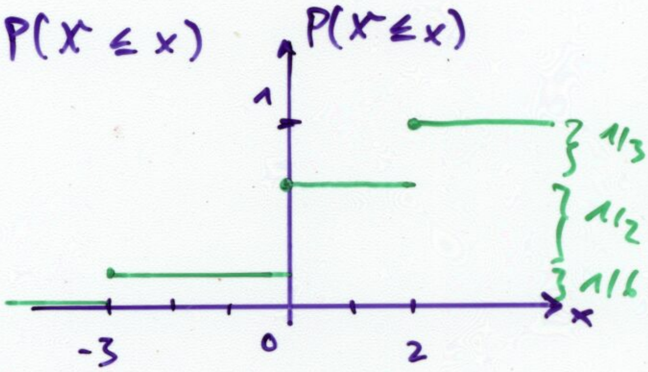
• Wa.verteilung $P(X=x)$

x	−3	0	2
$P(X=x)$	1/6	1/2	1/3



• Kumulative Verteilungsfunktion $P(X \leq x)$

x	−3	0	2
$P(X \leq x)$	1/6	$4/6 = \frac{2}{3}$	$6/6 = 1$



Monoton steigend von 0 bis 1

Geburtstagslotto

X: Anzahl Gewinner

$X \sim \text{Bin}(n = 250\,,\ \pi = 0{,}05)$

- Wie wahrscheinlich, dass niemand gewinnt?

$$P(X=0) = \binom{n}{0} \pi^0 (1-\pi)^n = (1-\pi)^n = (1-0{,}05)^{250} \approx 3 \cdot 10^{-6}$$

- Wie viele Schokoriegel muss ich haben, damit jeder Gewinner einen bekommt?
  (Ich möchte mit 95%-Wa. genug Riegel haben)

Zum Aufwärmen:

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) \approx 3 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-5} = 4{,}3 \cdot 10^{-5}$$

Kum. Verteilungfunktion ausrechnen:

x	0	1	..	17	18	19	..	250
$P[X \leq x]$	$3 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-5}$		0,92	0,95	0,97		1

=> Ich sollte mind. 18 Schokoriegel mitbringen