t-Test für eine Stichprobe

Bsp: Getränke; neue Abfüllmaschine → gleiche Füllmenge?

10 Flaschen: 493, 497, 495, 502, 494, 496, 500, 501, 495, 498 [ml]

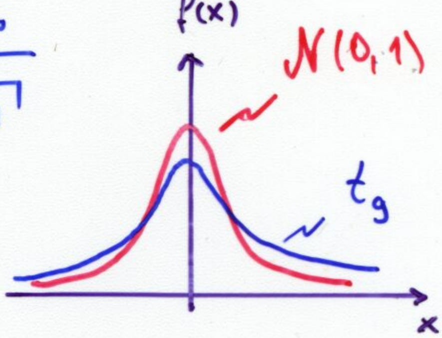
t-Test für eine Stichprobe

1) Modell: $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)$ iid; σ_X unbekannt

$n = 10$

2) $H_0: \mu = 500\,ml$; $H_A: \mu \neq 500\,ml$

3) Teststatistik: $T = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\overline{X}_n}} = \dfrac{\overline{X}_n - \mu_0}{\hat{\sigma}_X / \sqrt{n}}$



Falls H_0 stimmt: $T \sim t_{10-1} = t_9$

4) Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

5) Verw. bereich der Teststatistik:

$K = (-\infty; -t_{n-1; 1-\alpha/2}] \cup [t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}; \infty) =$

$= (-\infty; -t_{9; 0{,}975}] \cup [t_{9; 0{,}975}; \infty)$

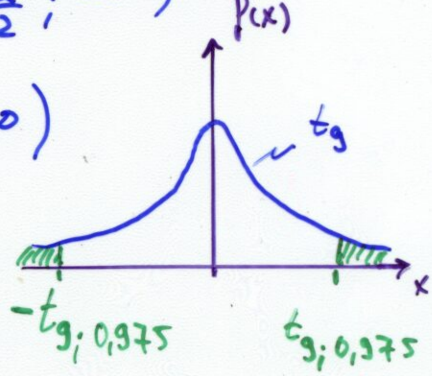


Tabelle: $t_{9; 0{,}975} = 2{,}262$

$\Rightarrow K = (-\infty; -2{,}262] \cup [2{,}262; \infty)$

6) Testentscheid:

$\overline{x}_n = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \approx 497{,}1$; $\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 497{,}1)^2} \approx 3{,}07$

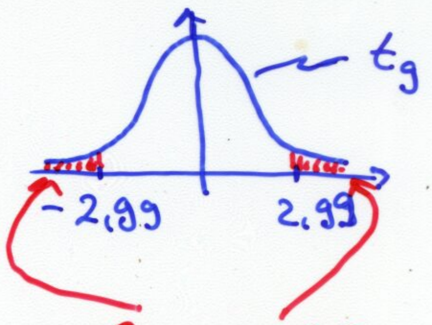
$\Rightarrow t = \dfrac{497{,}1 - 500}{3{,}07 / \sqrt{10}} \approx -2{,}99$; $t \in K$

$\Rightarrow H_0$ wird auf dem 5% Sign.niveau verworfen

Der Hersteller sollte seine Maschine neu einstellen.

• Alternative zu Verwerfungsbereich: p-Wert

1) – 4) wie gerade eben



5) p-Wert: $t = -2,99$

$$p\text{-Wert} = P(T \leq -2,99) + P(T \geq 2,99) =$$

$$= P(T \leq -2,99) + (1 - P(T \leq 2,99)) \approx$$

$$\approx 0,0076 + 0,0076 = 0,015$$

6) Testentscheid:

p-Wert $< 0,05$

$\Rightarrow H_0$ wird auf dem 5% Sign.niveau verworfen

Der Hersteller sollte seine Maschine neu einstellen.

Alternative zum Hypothesentest: Vertrauensintervall ③

$$(1-\alpha)-VI = \left[\bar{x}_n - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_n + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\Rightarrow 95\%-VI = \left[\bar{x}_n - t_{n-1;1-\frac{0{,}05}{2}} \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_n + t_{n-1;1-\frac{0{,}05}{2}} \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= \left[497{,}1 - 2{,}262 \cdot \frac{3{,}07}{\sqrt{10}} ; 497{,}1 + 2{,}262 \cdot \frac{3{,}07}{\sqrt{10}}\right] =$$

$$= [494{,}9 ; 499{,}3]$$

Die Abfüllmenge der neuen Maschine liegt mit 95%-Wa im Bereich $[494{,}9 ; 499{,}3]$.

<u>Merke:</u> Vertrauensintervall ≠ Verwerfungsbereich

- Vertrauensintervall enthält plausible Parameterwerte
- Verwerfungsbereich enthält unplausible Werte der Teststatistik; ist Teil eines Hypothesentests