

Dieses Quiz soll Ihnen helfen, Kapitel 2.5 - 2.6 besser zu verstehen.

Für Fragen 2-6: X ist eine Zufallsvariable, die die Werte 0, 1 und 2 annehmen kann (z.B. mit dem Computer simuliert). Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist in folgender Tabelle angegeben:

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.5	0.2	0.3

Auswertung und Lösung

Abgaben: 126 / 265

Maximal erreichte Punktzahl: 9

Minimal erreichte Punktzahl: 1

Durchschnitt: 6.26

Frage 1

Genau die korrekten Antworten: ca. 67% - Keine Antwort: ca. 0%.

Für Zufallsvariablen verwenden wir die Notation: Grossbuchstaben für die Funktion (z.B. X) und Kleinbuchstaben für einen konkreten Wert, den die Zufallsvariable annehmen kann (z.B. x). Wie schreibt man das Ereignis "Die Zufallsvariable X nimmt den Wert 3 an" korrekt?

Ca. 33% ☐ $x = 3$

Leider nicht.

✓ Ca. 68% ☐ $X = 3$

Richtig!

Frage 2

Genau die korrekten Antworten: ca. 96% - Keine Antwort: ca. 0%.

Was ist $P(X = 1)$?

Ca. 4% ☐ 0.5

Leider nicht.

✓ Ca. 97% ☒ 0.2

Richtig!

Ca. 1% ☐ 0.3

Leider nicht.

Frage 3

Genau die korrekten Antworten: ca. 34% - Keine Antwort: ca. 0%.

Weshalb gilt $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$?

Ca. 56% ☐ Weil die Ereignisse $X = 0$ und $X = 1$ unabhängig sind.

Leider nicht. Wenn $X = 0$ eintritt, kann das Ereignis $X = 1$ nicht mehr eintreten und umgekehrt. Die beiden Ereignisse sind also abhängig. Selbst wenn sie abhängig wären, behandelt Unabhängigkeit nur Wahrscheinlichkeiten von Schnittmengen; hier handelt es sich aber um eine Vereinigung.

✓ Ca. 41% ☒ Weil die Ereignisse $X = 0$ und $X = 1$ disjunkt (d.h. leere Schnittmenge) sind.

Richtig!

Ca. 10% ☐ Die Formel stimmt gar nicht!

Leider nicht.

Das Ereignis $X \leq 1$ lässt sich auch als $X = 0 \cup X = 1$ schreiben. Die Zufallsvariable X kann nur einen Wert annehmen, also ist die Schnittmenge von $X = 0$ und $X = 1$ leer (d.h., die beiden Ereignisse sind disjunkt). Daher gilt mit dem dritten Axiom von Kolmogorov:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0 \cup X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1).$$

Frage 4

Genau die korrekten Antworten: ca. 87% - Keine Antwort: ca. 0%.

Was ist $P(X \leq 1)$?

Ca. 10% ☐ 0.5

Leider nicht.

✓ Ca. 88% ☒ 0.7

Richtig!

Ca. 2% ☐ 0.8

Leider nicht.

Ca. 5% ☐ 1

Leider nicht.

Frage 5

Genau die korrekten Antworten: ca. 86% - Keine Antwort: ca. 1%.

Wie gross ist $E(X)$?

✓ Ca. 86% ☒ 0.8

Richtig!

Ca. 2% ☐ 3

Leider nicht.

Ca. 6% ☐ 1

Leider nicht.

Ca. 6% ☐ Keine Aussage möglich!

Leider nicht.

Der Erwartungswert ist $E(X) = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 = 0.8$.

Frage 6

Genau die korrekten Antworten: ca. 69% - Keine Antwort: ca. 10%.

(Optional; hier müssen Sie kurz auf dem Papier rechnen) Wie gross ist $Var(X)$ etwa?

✓ **Ca. 69%** ☒ 0.76

Richtig!

Ca. 7% ☐ 0.80

Leider nicht. Das wäre der Erwartungswert.

Ca. 0% ☐ 3

Leider nicht.

Ca. 7% ☐ 1

Leider nicht.

Ca. 6% ☐ Keine Aussage möglich!

Leider nicht.

In der letzten Frage haben wir gesehen, dass der Erwartungswert 0.8 ist. Die Varianz ist

$$Var(X) = 0.5(0 - 0.8)^2 + 0.2(1 - 0.8)^2 + 0.3(2 - 0.8)^2 = 0.76.$$

Frage 7

Genau die korrekten Antworten: ca. 87% - Keine Antwort: ca. 0%.

Wir sind bei einem Abendessen mit Freunden insgesamt 8 Personen. Jeder stösst mit jedem einmal an. Wie oft klingen die Gläser?

Ca. 2% ☐ 16

Leider nicht.

✓ **Ca. 87%** ☒ 28

Richtig!

Ca. 12% ☐ 36

Leider nicht.

Wir müssen herausfinden, wie viele Gruppen mit zwei verschiedenen Personen man aus 8 Personen bilden kann. Die Reihenfolge innerhalb der Gruppen spielt keine Rolle. Die Antwort darauf liefert der Binomialkoeffizient: $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

Frage 8

Genau die korrekten Antworten: ca. 56% - Keine Antwort: ca. 2%.

Wir betrachten eine Gruppe aus 5000 Männern und 5000 Frauen. Es wird zufällig ein Team aus 10 Personen gebildet. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl Frauen in dem Team angibt. Richtig oder Falsch: $X \sim \text{Bin}(n = 10, \pi = 0.5)$

Ca. 30% ☐ Richtig, das Modell stimmt ganz genau.

Leider nicht.

✓ Ca. 56% ☒ Das Modell stimmt nicht perfekt, aber es ist eine sehr gute Näherung.

Richtig!

Ca. 13% ☐ Das Modell stimmt nicht und ist auch nur eine unbrauchbare Näherung.

Leider nicht.

Für die erste Person, die ausgewählt wird, ist die Wahrscheinlichkeit genau $\pi_1 = \frac{5000}{10000} = 0.5$, dass sie eine Frau ist. Angenommen, es wird eine Frau gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Person auch eine Frau ist, ist nun nur noch $\pi_2 = \frac{4999}{9999} = 0.499$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ändert sich also mit jeder gezogenen Person und ist von der vorhergehenden Wahl abhängig. Damit sind die beiden Grundannahmen der Binomialverteilung (konstante Erfolgswahrscheinlichkeit und unabhängige Gewinne) verletzt. Allerdings ändert sich die Erfolgswahrscheinlichkeit nur in der dritten Nachkommastelle. D.h., die Erfolgswahrscheinlichkeit bleibt *fast* identisch und ist *fast* unabhängig von der vorhergehenden Wahl. Daher ist die Binomialverteilung eine sehr gute Näherung für die Situation.

Frage 9

Genau die korrekten Antworten: ca. 45% - Keine Antwort: ca. 2%.

Wir betrachten eine Gruppe aus 2 Männern und 2 Frauen. Es wird zufällig ein Team aus 3 Personen gebildet. Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl Frauen in dem Team angibt. Richtig oder Falsch: $X \sim \text{Bin}(n = 3, \pi = 0.5)$

Ca. 33% ☐ Richtig, das Modell stimmt ganz genau.

Leider nicht.

Ca. 21% ☐ Das Modell stimmt nicht perfekt, aber es ist eine sehr gute Näherung.

Leider nicht.

✓ **Ca. 45%** ☐ Das Modell stimmt nicht und ist auch nur eine unbrauchbare Näherung.

Richtig!

Für die erste Person, die ausgewählt wird, ist die Wahrscheinlichkeit genau $\pi_1 = \frac{2}{4} = 0.5$, dass sie eine Frau ist. Angenommen, es wird eine Frau gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Person auch eine Frau ist, ist nun nur noch $\pi_2 = \frac{1}{3}$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ändert sich also mit jeder gezogenen Person erheblich und ist von der vorhergehenden Wahl abhängig. Damit sind die beiden Grundannahmen der Binomialverteilung (konstante Erfolgswahrscheinlichkeit und unabhängige Gewinne) verletzt. Die Änderung der Erfolgswahrscheinlichkeit ist so gross, dass die Binomialverteilung auch als Näherung nicht angebracht ist.