

Serie 3

1. Ein Artikel der Los Angeles Times vom 24. 8. 1987 enthielt folgenden Abschnitt:

Several studies of sexual partners of people infected with the virus show that a single act of unprotected vaginal intercourse has a surprisingly low risk of infecting the uninfected partner—perhaps one in 100 to one in 1000. For an average, consider the risk to be one in 500. If there are 100 acts of intercourse with an infected partner, the odds of infection increase to one in five. Statistically, 500 acts of intercourse with one infected partner or 100 acts with five partners lead to a 100% probability of infection (statistically, not necessarily in reality).

Wo liegt der Fehler? Betrachten Sie dazu die Ereignisse $A_i =$ "Virusübertragung erfolgt beim i -ten Mal", $i = 1, \dots, 500$, und beantworten Sie folgende Fragen.

- a) Drücken Sie zunächst das Ereignis $B_2 :=$ "Ansteckung erfolgt bei zweimaligem Geschlechtsverkehr" durch die Ereignisse A_1 und A_2 aus. Was können Sie über die Wahrscheinlichkeit von B aussagen?
 - b) Verallgemeinern Sie nun Ihre vorige Überlegung: Stellen Sie das Ereignis $B_{500} :=$ "Ansteckung erfolgt bei 500 Mal Geschlechtsverkehr" mit Hilfe der A_i , $i = 1, \dots, 500$, dar und erklären Sie, welchen Fehler der Autor des Artikels macht.
2. Ein Hersteller von Reagenzgläsern möchte sicherstellen, dass eine grosse Lieferung weniger als 10% minderwertige Gläser enthält (Qualitätsstufe A). Zwecks Qualitätssicherung entnimmt er der Lieferung eine zufällige Stichprobe im Umfang von fünfzig Gläsern. Es stellt sich heraus, dass von diesen fünfzig Gläsern drei minderwertig sind.
- Für den Hersteller stellt sich nun das Problem, aufgrund der gezogenen Stichprobe zu entscheiden, ob er tatsächlich beruhigt davon ausgehen kann, dass die ganze Lieferung einen Anteil minderwertiger Gläser $< 10\%$ enthält oder ob es als plausibel gelten kann, dass er in der Stichprobe "rein zufällig" einen Anteil minderwertiger Gläser unter 10% erwischt hat, obwohl die ganze Lieferung in Tat und Wahrheit einen Anteil minderwertiger Gläser von 10% oder mehr aufweist.
- a) Welches Modell bzw. welche Verteilung beschreibt die Anzahl minderwertiger Gläser in der Stichprobe unter der Annahme, dass die einzelnen Gläser voneinander unabhängig sind?
 - b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Stichprobe genau drei minderwertige Gläser enthält, wenn der wahre Anteil minderwertiger Gläser in der Lieferung 10% beträgt?
 - c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Stichprobe höchstens drei minderwertige Gläser enthält, wenn die Lieferung einen Anteil von 10% minderwertiger Gläser enthält?
 - d) Formuliere in wenigen Worten das "Problem" des Herstellers!
3. Bei einer Untersuchung werden Wasserproben auf Verunreinigungen untersucht. Da nur 2 Prozent aller Proben verunreinigt sind, wird vorgeschlagen, von 10 Einzelproben jeweils die Hälfte der Probe zu einer Sammelprobe zusammenzufassen und zunächst nur die Sammelprobe zu untersuchen. Wird in der Sammelprobe keine Verunreinigung festgestellt, so ist die Untersuchung für die 10 Einzelproben beendet. Im anderen Fall werden alle 10 übriggebliebenen Hälften in 10 Einzeluntersuchungen geprüft.
- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in der Sammelprobe keine Verunreinigung zu finden (unter der Annahme, dass die Einzelproben unabhängig voneinander sind)?
 - b) Sei die Zufallsvariable Y die Gesamtzahl benötigter Analysen. Welche Werte kann Y annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?
 - c) Wieviele Analysen werden "im Durchschnitt" für die gesamte Untersuchung benötigt (d.h. wie gross ist $\mathbf{E}[Y]$)? Wieviele Analysen werden durch die Bildung von Sammelproben "im Durchschnitt" eingespart?

Besprechung: Donnerstag, October 06.

Abgabe: Übung nicht abgeben - wird nicht korrigiert.