Musterlösung zu Serie 9

1. X_i = Inhalt (in Zentiliter) der i-ten Weinflasche, $i = 1, \ldots, n = 12$.

a) 1. **Modell:** $X_1, \ldots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, $\sigma^2 = 1.5^2$ bekannt.

2. **Nullhypothese:** H_0: $\mu = \mu_0 = 70$
Alternative: H_A: $\mu < \mu_0$

3. **Teststatistik:**

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma}$$

Verteilung der Teststatistik unter H_0: $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 5\%$

5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**
$\Phi(0.95) = 1.645 \Rightarrow K = (-\infty, -1.645]$

6. **Testentscheid:**

$$z = \sqrt{12}\,\frac{70.25 - 70}{1.5} = 0.5774.$$

$z \notin K \;\rightarrow\; H_0$ beibehalten. Es ist also durchaus plausibel, dass der Weinhändler den Wein korrekt abfüllt.

b) 1. **Modell:** $X_1, \ldots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, σ^2 unbekannt; geschätzter Wert: $\hat{\sigma}_x^2 = 1.96^2$

2. **Nullhypothese:** H_0: $\mu = \mu_0 = 70$
Alternative: H_A: $\mu < \mu_0$

3. **Teststatistik:**

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\hat{\sigma}_X}$$

Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim t_{n-1}$

4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 5\%$

5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**
$t_{11;0.95} = 1.796 \Rightarrow K = (-\infty, -1.796]$

6. **Testentscheid:**

$$t = \sqrt{12}\,\frac{70.25 - 70}{1.96} = 0.441.$$

$t \notin K \;\rightarrow\; H_0$ beibehalten. Wir kommen also zum selben Ergebnis wie in Teilaufgabe a).

c) In dieser Teilaufgabe bezeichnet μ den Median der stetigen Zufallsvariblen X, also $P(X \leq \mu) = 0.5$.

1. **Modell:**
$$X_1, \ldots, X_{12} \text{ i.i.d. }, \tag{1}$$
wobei X_i eine beliebige Verteilung hat.
2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \mu = \mu_0 = 70$,
Alternative: $H_A: \ \mu < \mu_0$
3. **Teststatistik:** V : Anzahl X_i's mit $(X_i > \mu_0)$
Verteilung der Teststatistik unter H_0**:** $V \sim$ Bin$(12, 0.5)$.
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:** $K = [0, c]$ mit $c = \max\{v : P(V \leq v) \leq \alpha\}$. Es gilt $P(V \leq 2) = 0.019$ und $P(V \leq 3) = 0.073$. Also $c = 2$.
6. **Testentscheid:** $v = 7; 7 \notin K; \rightarrow$ H_0 beibehalten.

2. **a)** $\left[-403 \pm t_{9-1;97.5\%} \cdot \frac{3.127}{\sqrt{9}}\right] = [-403 \pm 2.31 \cdot 1.042] = [-405.4, -400.6]$

b) Da -400.0 nicht im 95%-Vertrauensintervall liegt, würde die Nullhypothese $H_0 : \mu = -400.0$ zu Gunsten der Alternative $H_A : \mu \neq -400.0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden. Die Beobachtungen und die Hypothese $H_0 : \mu = -400.0$ passen also nicht gut zusammen und daher ist die wahre Differenz wohl nicht -400.0.