

Musterlösung zu Serie 3

1. a) Es gilt

$$B_2 = A_1 \cup A_2,$$

da die Ansteckung beim ersten oder zweiten Mal erfolgen kann. Es gilt aber

$$\mathbb{P}[B_2] = \mathbb{P}[A_1 \cup A_2] \neq \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2],$$

da A_1 und A_2 nicht disjunkt sind (und $\mathbb{P}[A_1], \mathbb{P}[A_2] > 0$).

- b) Mit der gleichen Überlegung wie oben gilt

$$B_{500} = \bigcup_{i=1}^{500} A_i,$$

aber auch

$$\mathbb{P}[B_{500}] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{500} A_i\right] \neq \sum_{i=1}^{500} \mathbb{P}[A_i] = 500 \cdot \frac{1}{500} = 1.$$

Dem Autor ist anscheinend nicht bewusst, dass die Regel

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i]$$

nur für paarweise disjunkte Ereignisse A_i gilt, was hier offensichtlich nicht der Fall ist.

2. a) Es sei X die Anzahl minderwertiger Gläser in der Stichprobe. Unter der Annahme der Unabhängigkeit und unter der Voraussetzung, dass alle Gläser gleich hergestellt wurden, sodass jedes Glas die gleiche Chance hat, von minderwertiger Qualität zu sein, ist X binomialverteilt.
- b) Unter den gegebenen Bedingungen ist $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 50$ und $\pi = 0.1$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit

$$\mathbb{P}[X = 3] = \binom{50}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^{47} = 0.139.$$

- c) Wenn die Lieferung einen Anteil von 10% minderwertiger Gläser enthält, ist die Anzahl X minderwertiger Gläser in der Stichprobe $\text{Bin}(n, \pi)$ -verteilt mit $n = 50$ und $\pi = 0.1$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\mathbb{P}[X \leq 3] = \sum_{k=0}^3 \binom{50}{k} (0.1)^k \cdot (0.9)^{50-k} = 0.25.$$

- d) Für den Hersteller stellt sich das Problem, eine kritische Grenze des Anteils minderwertiger Gläser in einer Stichprobe festzulegen. Er will, falls die Lieferung qualitativ schlecht ist, dass die kritische Grenze mit hoher Wahrscheinlichkeit überschritten wird. Auf der anderen Seite will er, dass die Grenze möglichst nicht überschritten wird, falls die Qualität in Ordnung ist.

Kommentar:

Wie Teilaufgabe c) illustriert, kann ihm der Zufall dabei ziemlich in die Quere kommen: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 25% wird er aus einer Lieferung, die 10% minderwertige Gläser enthält, eine Stichprobe ($n = 50$) ziehen, die weniger als drei minderwertige Gläser enthält. Drei minderwertige Gläser entsprechen in der Stichprobe einem Anteil von 6%.

Dies zeigt, dass er aufgrund einer Stichprobe vom Umfang $n = 50$, die 6% oder weniger minderwertige Gläser enthält, nicht unbedingt schliessen kann, dass die ganze Lieferung weniger als 10% minderwertige Gläser enthält. Im Mittel wird er ja jedes vierte Mal rein zufällig eine solche Stichprobe ziehen und eine falsche Entscheidung treffen! Die Frage ist nun, wie klein der Anteil minderwertiger Gläser in der gezogenen Stichprobe sein muss, damit der Hersteller davon ausgehen kann, dass die ganze Lieferung die Qualitätsstufe A erfüllt. Diese Frage führt auf ein statistisches Testproblem.

3. a) Sei X die Anzahl der verunreinigten Einzelproben in einer Sammelprobe. Die Erfolgswahrscheinlichkeit p , dass eine Einzelprobe verunreinigt ist, beträgt 0.02. Unter der Annahme, dass die Einzelproben voneinander unabhängig sind, gilt $X \sim \text{Bin}(n = 10, p = 0.02)$.

Die Wahrscheinlichkeit, in der Sammelprobe keine Verunreinigung zu finden, ist gegeben durch

$$P[X = 0] = \binom{10}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{10} = 0.98^{10} = 0.817.$$

Anderer Lösungsweg: Jede einzelne Probe ist unabhängig von den anderen Proben mit 98% Wahrscheinlichkeit sauber. Also gilt (**Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse**)

$$P[\text{alle Proben sauber}] = \prod_{i=1}^{10} P[\text{i-te Probe sauber}] = 0.98^{10} = 0.817.$$

- b) Die Zufallsvariable Y kann nur die Werte 1 oder 11 annehmen, denn:
- falls alle Proben sauber sind, ist man nach einer Untersuchung fertig: $Y=1$
 - sonst muss man jede Probe einzeln untersuchen (man darf nicht stoppen, wenn man die erste verunreinigte Probe gefunden hat, denn es könnte ja noch mehrere geben!), also $Y=11$.

Folglich

$$\begin{cases} P[Y = 1] = P[\text{alle Proben sauber}] = 0.817 \\ P[Y = 11] = 1 - P[Y = 1] = 0.183 \end{cases}$$

- c) Die durchschnittliche Anzahl Analysen pro Sammelprobe ist gegeben durch den Erwartungswert der Zufallsvariablen Y :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= \sum_{k=0}^{\infty} k P[Y = k] = 1 \cdot P[Y = 1] + 11 \cdot P[Y = 11] \\ &= 1 \cdot 0.817 + 11 \cdot 0.183 = 2.83 \end{aligned}$$

“Im Durchschnitt” spart man also $10 - 2.83 = 7.17 \approx 7$ Untersuchungen ein.