Lineare Transformation

X gegeben ; $Y = g(X) = a + bX$

Was ist $E[Y]$, $Var(Y)$, $q_\alpha(Y)$?

$E[Y] = a + bE[X]$

$Var(Y) = b^2 \, Var(X)$; $\sigma_Y = b \cdot \sigma_X$

$q_\alpha(Y) = a + b q_\alpha(X)$

Bsp: X: Temperatur in Grad Celsius

$E[X] = 100$, $Var(X) = 10$

Y: Temperatur in Grad Fahrenheit

$F = 1{,}8 \cdot C + 32$

$\Rightarrow E[Y] = 180 + 32 = 212$; $Var(Y) = 3{,}24 \cdot 10 = 32{,}4$

Standardisieren

$X \sim \underline{\underline{\mathcal{N}}}(\mu, \sigma^2)$; $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow Y \sim \underline{\underline{\mathcal{N}}}(0,1)$

Bsp: $X \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$ IQ $\mu = 100, \sigma = 15$

$P(X \geq 120) = 1 - P(X \leq 120) =$

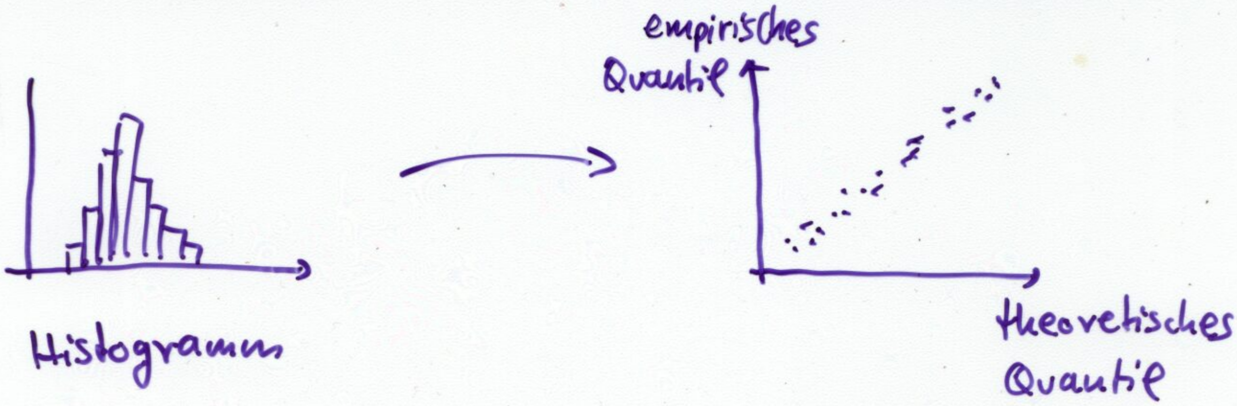
Tabelle

$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{120-\mu}{\sigma}\right) =$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{120-100}{15}\right) = 1 - P(Z \leq 1{,}33) =$

$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

Prüfen, ob Daten normalverteilt sind



Gerade: ☺

Krumm: ☹

Verteilung des arithmetischen Mittels

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} S_n$$

Annahme: $X_1, \dots, X_n \sim F$ (beliebig) i.i.d

independently, identically, distributed

$E[X_i] = \mu$; $Var(X_i) = \sigma$

1) Gesetz der grossen Zahlen (GGZ)

$$\bar{X}_n \rightarrow \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

Streuung $\sim 1/\sqrt{n}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{n}$ Gesetz: $\underline{\underline{\sigma_{\bar{X}}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\underline{\sigma_X}}$

2) Zentraler Grenzwertsatz (ZGS)

$$\bar{X}_n \approx \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

$$S_n \approx \mathcal{N}(n \cdot \mu, n \cdot \sigma_X^2)$$

Bsp: Flugzeug, 500 Passagiere

X: Gewicht eines Passagier's inkl. Gepäck

$E[X] = 90\text{ kg}, \quad \sigma_X = 15\text{ kg}$

Das Flugzeug darf nur starten, wenn das Transportgewicht höchstens 45,5 t ist.

Wie wahrscheinlich ist es, dass ein solches Flugzeug starten darf?

$$S_n = \sum_{i=1}^{500} X_i = \text{Transportgewicht}$$

$$S_n \approx \mathcal{N}(500 \cdot 90,\ 500 \cdot 15^2) =$$

$$= \mathcal{N}(45000,\ 112\,500)$$

$$P(S_n \leq 45\,500) = P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sigma_{S_n}} \leq \frac{45500 - E[S_n]}{\sigma_{S_n}}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{45500 - 45\,000}{\sqrt{112\,500}}\right) = P(Z \leq 1{,}49) \approx$$

$$\approx 0{,}9319$$