Wiederholung:

Venn-Diagramm

Wahrscheinlichkeitsmodell

a) Grundraum Ω, Elementarereignisse ω_i

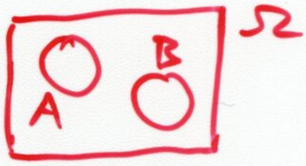
b) Ereignisse: Teilmengen von Ω

c) Wa. für jedes Ereignis „Fläche = Wa."

Axiome:

I) $P(A) \geq 0$

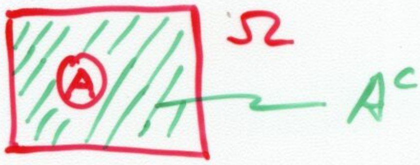
II) $P(\Omega) = 1$



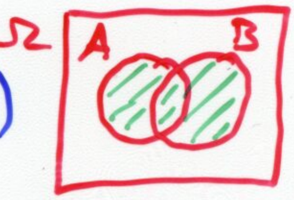
III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls $A \cap B = \{\}$

$\Downarrow$

IV) $P(A^c) = 1 - P(A)$

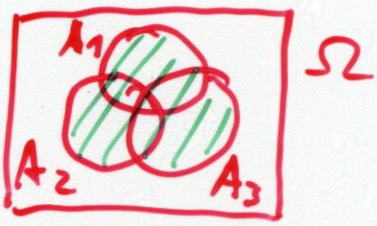


V) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



VI) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_n)$

$\vdots$



$\rightsquigarrow P(A) = \dfrac{\#\text{ günstig}}{\#\text{ möglich}}$ falls Elementarereignisse gleich wahrscheinlich

Geburtstagsparadoxon

n Personen; wie gross ist Wa., dass mind. 2 am gleichen Tag Geburtstag haben?

t_i : Geburtstag der i-ten Person $t_i \in \{1, \dots, 365\}$

El. ereignis $\omega = (t_1, t_2, \dots, t_n)$
mit $t_i \in \{1, \dots, 365\}$ für alle i

$\Rightarrow |\Omega| = 365^n$ ⊛ Alle El. ereign. gleich wa.

$A = \{$mind. zwei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag$\}$

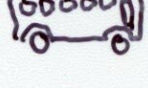
$A^c = \{$alle Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag$\}$

$|A^c| = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-n+1)$

$$P(A) \overset{IV}{=} 1 - P(A^c) \overset{*}{=} 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} =$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

n	10	20	23	30	50	57
$P(A)$ in %	11,7	41,1	50,7	70,6	97,0	99,0



Screening: Brustkrebs

T: „Test positiv" T^c: „Test negativ"

K: „Hat Brustkrebs" K^c: „Hat kein Brustkrebs"

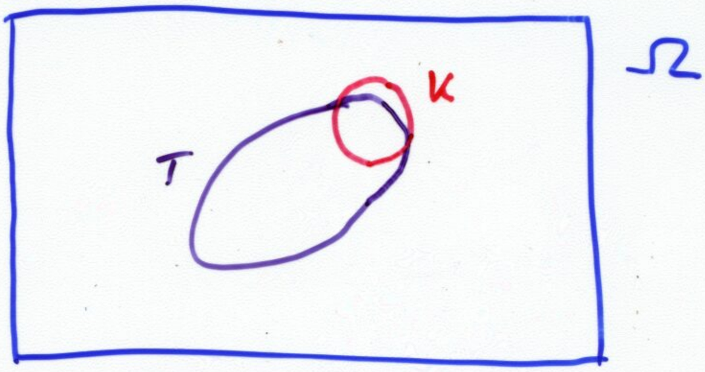
$P(K) = 0{,}01$

$P(T|K) = 0{,}85$ (Sensitivität; krank => Test pos.)

$P(T^c|K^c) = 0{,}9$ (Spezifität; gesund => Test neg.)

Testdesign

Wie gross ist $P(K|T)$?



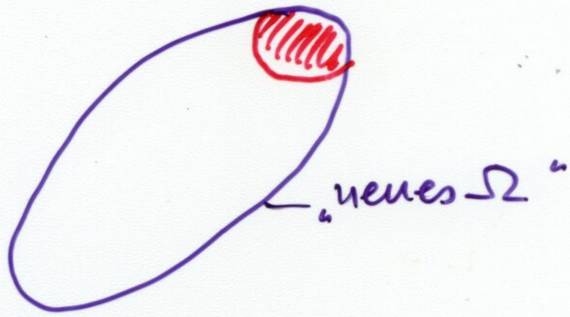
$P(K) = 0{,}01$

$P(T|K) = 0{,}85$

$P(T^c|K^c) = 0{,}9$

$P(T|K)$

$P(K|T)$



$$P(K|T) \overset{1}{=} \frac{P(T|K)P(K)}{P(T)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}01}{0{,}108} \approx \underline{\underline{0{,}08}}$$

$$P(T) \overset{2}{=} P(T|K)P(K) + P(T|K^c)P(K^c) =$$

$$= 0{,}85 \cdot 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}99 \approx 0{,}108$$

1 Satz von Bayes

2 Satz der totalen Wa.

Odds

- Alternative zu Wahrscheinlichkeit
- In Medizin verbreitet

$$\text{odds}(A) := \frac{P(A)}{1-P(A)}$$

Bsp: A: „Tod innerhalb von 1 Jahr"; $P(A) = 0{,}8$

$\Rightarrow \text{odds}(A) = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4$

$\Rightarrow$ „Es ist 4-mal so wa. im nächsten Jahr zu sterben als das Jahr zu überleben."

Odds Ratio

Bsp: Kranke Personen; manche behandelt

B: „behandelt"; B^c: „nicht behandelt"

G: „gesund geworden"; G^c: „nicht gesund geworden"

$P(G|B) = 0{,}8$; $P(G|B^c) = 0{,}1$

$$\Rightarrow \text{odds}(G|B) = \frac{P(G|B)}{1-P(G|B)} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4$$

$$\text{odds}(G|B^c) = \frac{P(G|B^c)}{1-P(G|B^c)} = \frac{0{,}1}{0{,}9} = 1/9$$

$$\Rightarrow OR = \frac{\text{odds}(G|B)}{\text{odds}(G|B^c)} = \frac{4}{1/9} = 36$$

„Die odds gesund zu werden sind mit Behandlung 36 mal so gross wie ohne Behandlung."