Übungsserie 11

1. Bei einer Gebäudeuntersuchung auf Asbest werden 3 Proben von $5l$ Luft abgesaugt und die Anzahl Asbest-Fasern in diesem Volumen gezählt. Man erhielt die 3 Werte $X_1(\omega) = 6$, $X_2(\omega) = 4$, $X_3(\omega) = 9$. Wir nehmen an, dass die Anzahl Fasern in einem Volumen von $5l$ eine Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariable ist. Der Parameter λ gibt also die mittlere Anzahl von Fasern in sehr vielen Proben an.

a) Gib einen Schätzwert $\hat{\lambda}(\omega)$ für λ an.

b) Gib ein approximatives 95% Vertrauensintervall für λ an.

c) Der Wert 10 liegt nicht in diesem Vertrauensintervall. Heisst das, dass man nicht damit rechnen muss, in einer Probe 10 Fasern zu finden?

2. Betrachten Sie positive i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Verteilungsfunktion

$$F_\theta(x) \;=\; 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)\,, \quad \theta > 0\,, \quad x \geq 0\,.$$

a) Berechne die Dichte.

b) Berechne den Erwartungswert.
Hinweis: Das auftretende Integral kann durch Substitution und/oder partielle Integration gelöst werden. Falls du scheiterst, benütze, dass

$$\int \sqrt{x}\exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)dx = -2\cdot\exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)\left(\frac{x}{\theta} + \frac{2\sqrt{x}}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\right).$$

c) Berechne einen Schätzer $\hat{\theta}_{MM}$ von θ nach der Momenten-Methode.

d) Berechne einen Schätzer $\hat{\theta}_{ML}$ von θ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

3. Die Zufallsvariable X_i habe die Dichte

$$f_\theta(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\cdot(1+x_i)^{-(1+\frac{1}{\theta})} & \text{falls } x_i > 0 \\ 0 & \text{falls } x_i \leq 0 \end{cases}$$

wobei $\theta \in \Theta = (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist. θ soll aufgrund einer Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ ist und die Daten von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ stammen.

a) Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Zeige, dass

$$T_n = t_n(X) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(1+X_i)}{n}$$

der Maximum-Likelihood Schätzer von θ ist.

b) Muss $\theta < 1$ sein für die Maximum-Likelihood-Methode? (**Ja/Nein**) (*Keine Begründung nötig!*).

c) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von $T_n = t_n(X) = t_n(X_1, \ldots, X_n)$.
Hinweis: Benütze, dass $Y_i := \log(1 + X_i)$ die Verteilung $\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ besitzt, d.h $f_Y(y) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} y}$ (kein Beweis erforderlich).

d) Ist $T_n = t_n(X)$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ? (*Begründe kurz!*)

e) In diesem Beispiel hier gilt folgende Ungleichung (kein Beweis erforderlich):

$$\mathrm{P}\left[|t_n(X) - \theta| > \epsilon\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \mathrm{Var}\left(t_n(X)\right) \quad \text{für } \epsilon > 0$$

Ist der Schätzer dann konsistent? (*Begründe kurz!*)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 1. Februar, 13 Uhr im Fach der/des entsprechenden Assistentin/Assistenten im HG E18.1