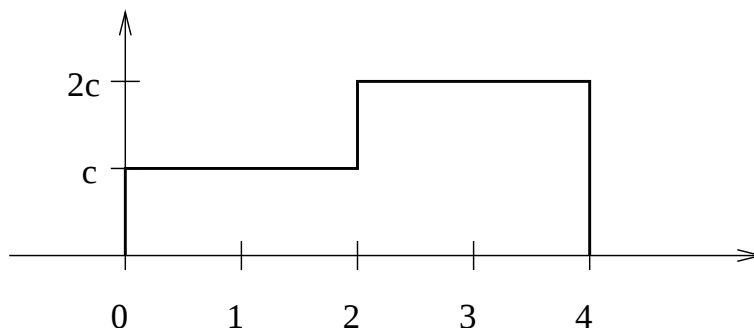


Übungsserie 9

1. Die Zufallsvariable X für die Fragen 1) - 3) besitzt folgende Dichte



d.h.

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ 2c & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1) Welchen Wert hat die Konstante c ?

a) 1

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{14}$

2) Welchen Wert hat der Erwartungswert von X ?

a) $12c$

b) $14c$

c) $15c$

d) $\frac{1}{4c} + 1$

e) $24c$

3) Welches ist die korrekte Verteilungsfunktion von X ?

a)

$$\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ c \int_0^x dt & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ c \int_0^x dt + 2c \int_2^x dt & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

b)

$$\int_0^4 f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ c \int_0^2 dt & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ c \int_0^2 dt + 2c \int_2^4 dt & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

c)

$$\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ c \int_0^x dt & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ c \int_0^2 dt + 2c \int_2^x dt & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

d)

$$\int_0^x tf(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ c \int_0^x t dt & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ c \int_0^2 t dt + 2c \int_2^x t dt & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

- 4) Wir betrachten nun zwei unabhängige Zufallsvariablen Y und Z mit $\mathbf{E}[Y] = 3$, $\mathbf{E}[Z] = 4$, $\text{Var}(Y) = 2$ und $\text{Var}(Z) = 4$.

Welchen Wert hat $\mathbf{E}[Y - Z] + \mathbf{E}[Y + Z]$?

- a) 0 b) 6 c) 7 d) 14

- 5) Wir betrachten nochmals die unabhängigen Zufallsvariablen Y und Z mit $\mathbf{E}[Y] = 3$, $\mathbf{E}[Z] = 4$, $\text{Var}(Y) = 2$ und $\text{Var}(Z) = 4$.

Welchen Wert hat $\text{Var}(\frac{1}{2}(Y - 4 \cdot Z))$?

- a) -7 b) 9 c) $-15\frac{1}{2}$ d) $16\frac{1}{2}$ e) 33 f) $64\frac{1}{2}$

2. Eine Rohrleitung besteht aus 5 Segmenten. Da die Ausflussmenge kleiner ist als die Zuflussmenge, muss irgendwo ein Leck bestehen. Wir nehmen an, dass es genau ein Leck gibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Leck in Segment i befindet, sei für alle Segmente gleich, nämlich $1/5$. Ziel ist es, das defekte Segment mittels Inspektionen der Durchflussmenge bei den 4 Zwischenstücken zwischen den Segmenten ausfindig zu machen. (Beispiel: Wenn die Durchflussmenge beim Zwischenstück zwischen dem 2. und 3. Segment kleiner ist als die Zuflussmenge, so ist entweder das 1. oder das 2. Segment defekt.)

Im folgenden werden zwei Strategien zum Auffinden des Lecks verglichen.

- a) Es wird sukzessive bei allen 4 Zwischenstücken die Durchflussmenge gemessen, bis man das Leck eindeutig identifizieren kann. Sei X die Anzahl benötigter Inspektionen. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten nimmt X die Werte $1, \dots, 4$ an? Berechnen Sie zudem $\mathbf{E}[X]$ und $\text{Var}(X)$.

- b) Eine etwas raffiniertere Strategie als die in a) beschriebene besteht darin, die Inspektion jeweils in der "Mitte" des Gebiets durchzuführen, in dem sich das Leck noch befinden kann, wobei man das Gebiet in jedem Schritt so gut wie möglich "halbiert". (Man misst also zuerst die Durchflussmenge direkt nach dem 2. Segment. Falls die Durchflussmenge hier kleiner ist, dann weiss man, dass das Leck in Segment 1 oder 2 sein muss. Nun misst man direkt nach dem 1. Segment und stellt so fest, ob das Leck im 1. oder 2. Segment ist. Falls die Durchflussmenge nach dem 2. Segment nicht kleiner ist, muss das Leck in 3., 4. oder 5. Segment sein. Nun misst man direkt nach dem 3. Segment. Falls der Durchfluss dort nicht kleiner ist, misst man direkt nach dem 4. Segment. So kann man das Leck mit Sicherheit finden.)

Es sei Y die Anzahl mit dieser Strategie benötigten Untersuchungen. Welche Werte nimmt Y mit welcher Wahrscheinlichkeit an? Berechnen Sie zudem $\mathbf{E}[Y]$ und $\text{Var}(Y)$.

- c) Wieviele Inspektionen spart Strategie b) "im Schnitt" gegenüber Strategie a)?

3. a) In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass das arithmetische Mittel und die Abweichung vom arithmetischen Mittel unkorreliert sind: $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Varianz σ^2 . Zeige, dass

$$\text{Cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = 0,$$

wobei $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- b) Im Allgemeinen ist “unkorreliert” eine schwächere Aussage als “unabhängig”. D.h., zwei Zufallsvariablen können unkorreliert aber abhängig sein. Falls sie aber unabhängig sind, dann sind sie sicher auch unkorreliert. Ein Beispiel für abhängige Variablen, die unkorreliert sind, finden Sie im Skript auf Seite 98.

Einen Spezialfall bildet die multivariate Normalverteilung, denn hier ist Korrelation gleichbedeutend mit Abhängigkeit. Dies soll im Folgenden gezeigt werden: Seien Y und Z bivariat normalverteilt (vgl. S. 57) mit Parametern $\mu_Y, \mu_Z, \sigma_Y^2, \sigma_Z^2, \rho$. Zeige, dass Y und Z genau dann unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind. Verwende dazu, dass $\rho = \text{corr}(Y, Z)$.

4. Die Chebyshev-Ungleichung liefert eine Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten, auch wenn die genaue Verteilungsfunktion nicht bekannt ist. Es muss nur der (endliche) Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 einer Zufallsvariablen X bekannt sein, dann gilt für jedes $k > 0$:

$$P[|X - \mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Diese Ungleichung ist bei vielen theoretischen Überlegungen zentral. Da sie aber unter so allgemeinen Bedingungen gültig ist, sind die angegebenen Schranken für die Wahrscheinlichkeit nicht sehr genau. In der Praxis ist sie daher nur dann brauchbar, wenn wirklich keine Zusatzinformationen über die Verteilung erhältlich sind. Dies soll in dieser Aufgabe gezeigt werden.

Die Anzahl Turbinen, die pro Woche in einer Fabrik hergestellt werden, sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 50$ und Varianz $\sigma^2 = 25$.

- a) Angenommen, es ist nichts weiter über die Zufallsvariable bekannt. Was kann man dann über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass in dieser Woche zwischen 40 und 60 Turbinen hergestellt werden?
- b) Nun nehmen wir an, dass zusätzliche Informationen über die Zufallsverteilung erhältlich sind. Dann kann die Wahrscheinlichkeit aus der letzten Teilaufgabe genau berechnet werden und wir sehen, wie gut die Chebyshev-Abschätzung ist. Angenommen, die Zufallsvariable ist $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Woche zwischen 40 und 60 Turbinen hergestellt werden?