Übungsserie 8

1. Es seien X, Y und Z unkorrelierte Zufallsvariablen mit den Varianzen σ_X^2, σ_Y^2 und σ_Z^2. Wir betrachten die Zufallsvariablen $U = 2X - Z$ und $V = Y + 3Z$.

a) Berechne die Varianzen von U und V.

b) Berechne die Kovarianz und die Korrelation von U und V.

2. In einem Telefon- oder Computernetz mit n Teilnehmern sei X_{ij} die Anzahl Anrufe von Teilnehmer i zu Teilnehmer j ($X_{ii} = 0, X_{ij} \neq X_{ji}$ im allgemeinen). Aus Datenschutzgründen sind die X_{ij} nicht bekannt, aber typischerweise werden die folgenden Grössen registriert:

$$Y_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} \; = \; \text{Anzahl Anrufe, die Teilnehmer } i \text{ macht,}$$
$$Z_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} \; = \; \text{Anzahl Anrufe, die Teilnehmer } j \text{ erhält.}$$

a) Zeige an einem Beispiel mit $n = 3$, dass man aus Y_i und Z_i für $i = 1, \ldots, 3$ die Werte X_{ij} nicht bestimmen kann.

b) Nehme an, die X_{ij} seien alle unabhängig und Poisson(λ_{ij})-verteilt. Berechne dann $\mathbf{E}[Y_i]$, $\mathbf{E}[Z_j]$, $\mathrm{Var}(Y_i)$, $\mathrm{Var}(Z_j)$ und $\mathrm{Cov}(Y_i, Z_j)$. Zeige, dass man aus diesen Grössen λ_{ij} berechnen kann.

3. In dieser Aufgabe wollen wir die Verteilung des arithmetischen Mittels $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ einer Zufallsstichprobe $X_i, i = 1, \ldots, n, i.i.d.$ studieren.

Unter der Adresse `http://www.ruf.rice.edu/~lane/rvls.html` befindet sich das "Rice Virtual Lab in Statistics". Unter **Simulations/Demonstrations** befinden sich einige Simulationen. Wähle **Sampling Distribution Simulation** aus, damit gelangt man zu einer Seite mit Erläuterungen. Nach einiger Zeit erscheint links oben ein Knopf „Begin". Durch Drücken dieses Knopfes erscheint ein Fenster mit vier Diagrammen. Im obersten Bild ist die „Parent population" dargestellt, das Modell für die einzelne Beobachtung X_i. Oben rechts ist ein Button „Clear lower 3" und darunter kann die Verteilung eingestellt werden, von der wir simulieren möchten. Per Default steht dort „Normal". Falls dies nicht der Fall sein sollte, stelle auf „Normal" ein.

a) Erzeuge einige Zufallsstichproben $x_1, \ldots, x_N$ vom Umfang $N = 16$ nach dem Modell $X_i \sim \mathcal{N}\langle\mu = 16, \sigma^2 = 25\rangle, i.i.d.$. Betrachte die Realisierungen $x_1, \ldots, x_N$ („Sample Data") im zweiten und das arithmetische Mittel $\bar{x}_N$ im dritten Diagramm.

Setze N im dritten Diagramm auf 16. Die Stichproben können durch mehrfaches Drücken auf „Animated Sample"im zweiten Diagramm erzeugt werden.
Hinweis: Die Angabe „Reps" im zweiten Diagramm bleibt immer gleich 16, sie steht für den Stichprobenumfang, „Reps" im dritten Diagramm hingegen bezeichnet die Anzahl der gezogenen Stichproben und nimmt deshalb mit jeder zusätzlich simulierten Stichprobe um eins zu.
Durch Drücken auf „Clear Lower 3" kann das dritte Diagramm in den Anfangszustand zurückversetzt werden.

b) Simuliere je 10000 Zufallsstichproben vom Umfang 2,5 und 25 nach dem Modell $X_i \sim \mathcal{N}\langle\mu = 16, \sigma^2 = 25\rangle, i.i.d.$. Betrachte die Verteilung des arithmetischen Mittels $\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ für die verschiedenen Stichprobengrössen und vervollständige untenstehende Tabelle. Kommentiere die Ergebnisse.

Der Stichprobenumfang wird im dritten Diagramm mit der Wahl von N festgelegt. Die (empirischen) Kennzahlen der simulierten Verteilung des arithmetischen Mittels können links vom dritten Diagramm abgelesen werden („Distribution of Means“). Die (theoretischen) Kennzahlen von X_i können dem Aufgabentext bzw. dem ersten Diagramm („Parent population“) entnommen werden.

	X_i		$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$	
Kennzahl		$N = 2$	$N = 5$	$N = 25$
Mean				
Sd				
Skew				

c) Leite den Erwartungswert und die Standardabweichung von $\bar{X}_N$ für $N = 25$ theoretisch her und vergleiche das Resultat mit dem Ergebnis der Simulation. Gib die Verteilung von $\bar{X}_N$ an.

d) Führe nun mit anderen Verteilungen ebenfalls Simulationen aus. Betrachte ebenfalls wieder die Verteilung des arithmetischen Mittels $\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ für verschiedene Stichprobengrössen N. Was beobachtest du? Kommentiere diese Beobachtungen!

Oben rechts unter dem Button „Clear lower 3“ kann man ebenfalls eine uniforme Verteilung $X_i \sim$ Uniform$(0, 32)$ („Uniform“) und eine schiefe Verteilung („Skewed“) wählen, unter „Custom“ kann mit der rechten Maustaste die Dichte einer beliebigen Verteilung im obersten Diagramm eingezeichnet werden.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 11. Januar, 13 Uhr im Fach der/des entsprechenden Assistentin/Assistenten im HG E18.1