Übungsserie 5

1. Bei positiven Zufallsgrössen Y ist die Annahme der Normalverteilung oft nicht sinnvoll. Hingegen zeigt es sich in vielen Anwendungen, dass $\log Y$ (Logarithmus zur Basis e) genähert normalverteilt ist.

a) Berechne die Verteilungsfunktion und die Dichte der Zufallsvariablen $Y = e^X$, wobei $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. (Das heisst, $\log Y = X$ ist normalverteilt.)

b) Berechne $\mathrm{P}\left[Y > 100\right]$, wenn $\log Y \sim \mathcal{N}\left(4, 0.5\right)$.

2. Betrachte eine Telefonzentrale mit durchschnittlich 50000 Anrufen pro Tag. Der Überlastungspunkt ist definiert als die kleinste ganze Zahl N derart, dass die Wahrscheinlichkeit für N oder mehr Anrufe pro Sekunde kleiner als 0.001 ist.
Nehme an:

- die Anzahl Anrufe pro Sekunde ist Poisson-verteilt,
- die Anrufe sind über den ganzen Tag gleichmässig verteilt, d.h. konstante Anrufrate pro Sekunde über den ganzen Tag.

a) Bestimme den Überlastungspunkt.

b) Vergleiche den Überlastungspunkt mit der durchschnittlichen Anzahl Anrufe pro Sekunde.

3. **a)** Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion:

$$p(j,k) = \mathrm{P}\left[X = j, Y = k\right] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ & \text{und } k = 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Gewichtsfunktionen $p_X(j) = \mathrm{P}\left[X = j\right]$ und $p_Y(k) = \mathrm{P}\left[Y = k\right]$ der Randverteilungen sowie die Gewichtsfunktionen $p_{X|Y}(j|k) = \mathrm{P}\left[X = j | Y = k\right]$ und $p_{Y|X} = \mathrm{P}\left[Y = k | X = j\right]$ der bedingten Verteilungen.

b) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Dichte:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Dichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ der Randverteilungen. (Skizziere zuerst den Bereich, wo $f(x,y) > 0$.)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7. Dezember, 13 Uhr im Fach der/des entsprechenden Assistentin/Assistenten im HG E18.1