Übungsserie 4

1. Die Zufallsvariable X beschreibe die tägliche Arbeitszeit eines Ingenieurs in Stunden und habe folgende Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} c(x-7)^2 & : \quad 7 \leq x \leq 10 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimme die Konstante c.

b) Berechne die Verteilungsfunktion von X.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen 8 und 9 Stunden einnimmt.

2. Die Schweizer Bevölkerung trank 4.14 Mio Hektoliter Bier (58.5 Liter pro Kopf) im Jahre 2000. Davon wird 60% in Mehrwegflaschen mit Pfand verkauft. Zweck von Mehrwegflaschen ist, durch ihr mehrmaliges Verwenden die Herstellungsenergie, Umweltbelastung und Abfallmenge zu senken. Schauen wir also das Ganze einmal genauer an:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mehrwegflasche nicht zurückgebracht wird, ist $p = 0.03$.

i) An einem Getränkestand einer Grossveranstaltung wurden in den letzten paar Minuten 37 solcher Pfandflaschen verkauft.

a) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl nicht zurückgebrachter (leeren) Flaschen. Welches ist die Verteilung von X?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 37 Flaschen mehr als 2 nicht zurückgebracht werden?

ii) Wir schauen nun allgemein das Leben einer zufällig ausgewählten Mehrwegflasche an, dabei nehmen wir an, dass diese Flasche mehrmals zurückgebracht wird.

c) Die Zufallsvariable Y beschreibt, wie oft diese Flasche gebraucht wird (d.h. wenn die Flasche k-mal gebraucht wird, dann wird sie $k-1$-mal zurückgebracht und beim $k$ten mal anderweitig entsorgt). Welche Verteilung hat Y?

d) Mehrwegflaschen sind (im Durchschnitt) bis zu 40mal wiederverwendbar, bevor sie definitiv entsorgt werden müssen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche mehr als 40mal zurückgebracht wird?

Hinweis: $s_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^n = a_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ wobei $q \neq 1$.

Bitte wenden!

3. Sei X eine diskrete ZV mit Werten in $1, 2, 3, \ldots$. Die Verteilung von X ist gegeben durch

$$P[X = n] = n^{-s}/\zeta(s) \tag{1}$$

wobei $s > 1$ ein Parameter der Verteilung ist, und $\zeta(s)$ ist die berühmte *Riemann'sche Zeta-Funktion*: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Die Verteilung von X heisst *Euler -Verteilung.*

Für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ definieren wir das Ereignis E_m als
"X ist durch m ohne Rest teilbar",
oder auch
"Es gibt ein ganzzahliges $k > 0$, so dass $X = k \cdot m$".

a) Zeige, dass $P[E_m] = m^{-s}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

b) Seien p und q zwei unterschiedliche Primzahlen. Zeige: E_p und E_q sind unabhängig. (Hinweis: n ist dann und nur dann durch p *und* durch q teilbar, wenn n auch durch pq teilbar ist.)

c) Seien $p_1, p_2, \ldots, p_k$ unterschiedliche Primzahlen. Zeige: $E_{p_1}, E_{p_2}, \ldots, E_{p_k}$ sind unabhängig.
(Gleicher Hinweis wie oben: n ist durch p_1 und p_2 und $\ldots$ und p_k teilbar $\Leftrightarrow$ n ist durch $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ teilbar.)

d) Betrachte $\bigcap_{p:\, p\, prim} E_p^c$. Welche Realisation von X liegt in $\bigcap_{p:\, p\, prim} E_p^c$? Beweise damit die *Euler'sche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p:\, p\, prim} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{2}$$

Anmerkungen: Eine Zahl p ist eine Primzahl, wenn sie genau 2 Teiler hat.
Beispiele: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 30. November, 13 Uhr im Fach der/des entsprechenden Assistentin/Assistenten im HG E18.1