

Übungsserie 2

1. Das Simpson'sche Paradoxon

Wir untersuchen die Erfolgswahrscheinlichkeiten bei einer Zulassungsprüfung an der Universität Berkeley im Jahr 1973 (wobei wir die beobachteten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretieren):

Abt.	Männer		Frauen		Gesamt	
	Bewerber	Zugelassene	Bewerberinnen	Zugelassene	Bewerber/innen	Zugelassene
I	825	511	108	89	933	600
II	373	22	341	24	714	46
Ges.	1198	533	449	113	1647	646

Betrachten Sie folgende Ereignisse:

A = Kandidat (männlich).

A^c = Kandidatin (weiblich).

B = Kandidat/in bewirbt sich bei Departement I.

B^c = Kandidat/in bewirbt sich bei Departement II.

C = Kandidat/in wird aufgenommen.

C^c = Kandidat/in wird abgelehnt.

- a) Berechnen Sie aus obiger Tabelle die folgenden Wahrscheinlichkeiten. (Annahme: Kandidat/in wird zufällig ausgewählt, jede/r mit gleicher Wahrscheinlichkeit). Was bedeuten die Wahrscheinlichkeiten in Worten?
 - i) $P[A]$.
 - ii) $P[B|A]$ und $P[B|A^c]$.
 - iii) $P[A \cap C]$ und $P[A^c \cap C]$.
- b) Berechnen Sie mit Hilfe der Resultate in a) (nicht direkt aus der Tabelle, obwohl dies auch möglich wäre) die folgenden Wahrscheinlichkeiten. Was bedeuten sie in Worten?
 - i) $P[B]$ und $P[C]$.
 - ii) $P[A \cap B]$ und $P[A^c \cap B]$.
 - iii) $P[C|A]$ und $P[C|A^c]$.
- c) Wir nehmen an, dass Frauen und Männer gleich gut qualifiziert sind. Spricht dann das Resultat in b)iii) dafür, dass eines der beiden Geschlechter bei der Zulassung benachteiligt wird?
- d) Berechnen Sie (aus der Tabelle) die folgenden Wahrscheinlichkeiten. Was bedeuten sie in Worten?

$$P[C|A \cap B], P[C|A^c \cap B], P[C|A \cap B^c] \text{ und } P[C|A^c \cap B^c].$$
- e) Untersuchen Sie wiederum wie in c) die Auswirkung des Geschlechts auf die Zulassung, allerdings jetzt mit den Resultaten aus d). Man vergleiche mit dem Resultat in c).
- f) Wie kommt der Widerspruch zwischen c) und e) zustande? Berechnen Sie $P[C|B]$ und $P[C|B^c]$ (Bedeutung?) und verwenden Sie zusätzlich die Resultate aus a)ii), um den Widerspruch aufzulösen.

2. (Ziegenproblem) In einem Quiz ist ein Auto zu gewinnen, das hinter einer von drei Türen versteckt ist. Quizmaster zum Kandidaten: “Wählen Sie eine Tür, bitte!” Der Kandidat wählt eine Tür, doch bevor er sie öffnet, ruft der Quizmaster: “Halt, ich zeige Ihnen zuerst, wo das Auto nicht ist.” Er öffnet eine der verbleibenden zwei Türen und fragt: “Wollen Sie immer noch Ihre Tür, oder wollen Sie vielleicht doch wechseln?”

Würden Sie wechseln? (Begründung!)

3. Werden bei einer Schweizer Bank neue Leute eingestellt, so verläuft das Auswahlverfahren in etwa wie folgt. In einem ersten Schritt werden die Bewerbungsunterlagen genau betrachtet und jeder Bewerber erhält ein Rating:

A: Sehr geeignet
B: Eventuell geeignet
C: Eher ungeeignet

Alle Kandidaten werden zu einem Bewerbungsgespräch eingeladen. Aufgrund von diesem werden die Kandidaten in drei verschiedene Kategorien eingeteilt:

IN1: Der Kandidat bekommt die Stelle.
 OUT1: Der Kandidat wird abgelehnt.
 Chance: Der Kandidat wird für ein 2. Bewerbungsgespräch aufgeboten.

Wird ein Kandidat zu einem 2. Bewerbungsgespräch aufgeboten, so sind seine Chancen 50% die Stelle zu bekommen (IN2), respektive abgelehnt zu werden (OUT2), unabhängig von seinem Rating. Das heisst, es gilt:

$$P[\text{IN2}|\text{Chance}] = P[\text{OUT2}|\text{Chance}] = 0.5.$$

Aufgrund der Bewerbungsunterlagen werden die Kandidaten wie folgt eingestuft:

$$P[A] = P[B] = P[C] = 1/3.$$

$$\begin{array}{lll} P[\text{IN1}|A] & = & 0.5 & P[\text{IN1}|B] & = & 0.2 & P[\text{IN1}|C] & = & 0 \\ P[\text{OUT1}|A] & = & 0.2 & P[\text{OUT1}|B] & = & 0.4 & P[\text{OUT1}|C] & = & 0.8 \\ P[\text{Chance}|A] & = & 0.3 & P[\text{Chance}|B] & = & 0.4 & P[\text{Chance}|C] & = & 0.2. \end{array}$$

- Begründen Sie kurz in einem Satz, weshalb $P[\text{IN1} \cup \text{IN2}|A] = P[\text{IN1}|A] + P[\text{IN2}|A]$ gilt.
- Fredi bewirbt sich auf die Stelle. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er diese erhält.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein abgelehnter Mitarbeiter am Anfang ein A-Rating bekommen hatte?
- Fredi hat es geschafft, er hat die Stelle erhalten. Er diskutiert mit anderen Bewerbern, die es auch geschafft haben. Sie fragen sich, welcher Anteil von ihnen die Stelle nur via 2.Bewerbungsgespräch bekommen hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.