

Lösungsskizze Übungsserie 13

1. Die Anzahl der Erdbeben am Tag i bezeichnen wir mit X_i ($i = 1, \dots, n$). Gemäss Aufgabenstellung nehmen wir an, dass $X_i \sim \text{Poi}(\lambda)$ i.i.d. .

- a) Als erstes wird der Parameter λ der Poissonverteilung geschätzt. Da dieser gerade gleich ihrem Erwartungswert ist, kann man dazu die Momentenmethode in ihrer simpelsten Form verwenden:

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{2590}{2150} \approx 1.20$$

Die erwarteten Anzahlen in den einzelnen Klassen berechnet man dann so:

$$e_j = n \hat{P}[X_i = j] = n \exp(-\hat{\lambda}) \frac{\hat{\lambda}^j}{j!}$$

Für die Klasse $j = 2$ liefert dies

$$e_2 = 2150 \cdot \exp(-1.20) \frac{1.20^2}{2!} = 467.0.$$

- b) Die Pearson- χ^2 -Statistik besitzt hier den Wert $z^2 = \sum_{j=0}^{6+} d_j^2 = \sum_{j=0}^{6+} \frac{(n_j - e_j)^2}{e_j} = 13.5$. Da wir eine Klasseneinteilung mit 7 Klassen gewählt und ausserdem einen Parameter – das λ – geschätzt haben, besitzt Z^2 unter der Nullhypothese H_0 : „Die Daten folgen einer Poissonverteilung“ genähert eine χ^2 -Verteilung mit

$$\begin{aligned} \nu &= \text{Anzahl Klassen} - 1 - \text{Anzahl geschätzter Parameter} \\ &= 7 - 1 - 1 = 5 \end{aligned}$$

Freiheitsgraden. Der Verwerfungsbereich ist damit nach der Tabelle im Skript $K =]11.07, \infty[$. 13.5 liegt im Verwerfungsbereich. Die Daten sind wohl nicht poissonverteilt.

2. X_i = Inhalt (in Zentiliter) der i -ten Weinflasche, $i = 1, \dots, n = 12$.

- a) Modell: $X_1, \dots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1.5^2$ bekannt

$$H_0: \mu = \mu_0 = 70$$

$$H_A: \mu < \mu_0$$

Teststatistik:

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \rightarrow t = \sqrt{12} \frac{70.25 - 70}{1.5} = 0.5774$$

Unter H_0 : $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Verwerfungsbereich auf dem 5%-Signifikanzniveau: $\{T < q_{0.05} = -1.645\}$

Entscheidung: $0.5774 > -1.645 \rightarrow H_0$ beibehalten.

b) Fehler 2. Art für den z-Test:

$$\begin{aligned}
 P_{H_A} [H_0 \text{ beibehalten}] &= P_{\mu=69.5} [T \geq -1.645] \\
 &= P_{\mu=69.5} \left[\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \geq -1.645 \right] \\
 &= P_{\mu=69.5} \left[\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} - \sqrt{n} \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} \geq -1.645 \right] \\
 &= P_{\mu=69.5} \left[\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \geq \sqrt{n} \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} - 1.645 \right] \\
 &= 1 - \Phi \left(\sqrt{n} \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} - 1.645 \right) = 1 - \Phi \left(\sqrt{12} \frac{0.5}{1.5} - 1.645 \right) = 0.688
 \end{aligned}$$

Letzter Schritt folgt aus

$$\begin{aligned}
 X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{N}(\mu = 69.5, \sigma^2 = 1.5^2) &\implies \bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n) \\
 &\implies \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)
 \end{aligned}$$

c) Modell: $X_1, \dots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt; geschätzter Wert: $s_x^2 = S_X^2(\omega) = 1.96^2$

$$H_0: \mu = \mu_0 = 70$$

$$H_A: \mu < \mu_0$$

Teststatistik:

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_X} \rightarrow t = \sqrt{12} \frac{70.25 - 70}{1.96} = 0.441$$

Unter $H_0: T \sim t_{n-1}$

Verwerfungsbereich auf dem 5%-Signifikanzniveau: $\{T < t_{11;0.05} = -1.796\}$

Entscheidung: $0.441 > -1.796 \rightarrow H_0$ beibehalten.

3. Wenn $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ die Personen indiziert, X_i das Testergebnis der i -ten Person vor dem Trainingsprogramm ist und Y_i das Ergebnis danach, dann ist $D_i = X_i - Y_i$ die Abnahme des Testergebnisses bei Person i .

Wir nehmen als Modell an, dass D_i i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $i = 1, \dots, n$.

Die Nullhypothese (die wir ja verwerfen möchten) lautet dann

$H_0: \mu = 0$ bzw. in Worten "Das Training zeigt keine Wirkung".

Als einseitige Alternative wählen wir

$H_A: \mu > 0$ oder "Das Training reduziert die Pulsfrequenz".

Die Testgrösse t des t -Tests beträgt

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{d}_n - 0}{s_x} = 2.91$$

und liegt damit im Verwerfungsbereich $K = (t_{9,0.95}, \infty) = (1.83, \infty)$ des Tests. Die Nullhypothese wird verworfen. Die Wirkung des Trainingsprogramms ist statistisch signifikant.