Lösungsskizze Übungsserie 12

1. **a)**
- Modellannahme: $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right), i = 1, \ldots n = 9;$ i. i. d.
- $H_0 : X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \sigma^2\right), i = 1, \ldots n = 9;$ mit $\mu_0 = 8, \sigma^2$ unbekannt.
- $H_A : X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_A, \sigma^2\right), i = 1, \ldots n = 9;$ mit $\mu_A \neq 8, \sigma^2$ wie unter H_0.
- Teststatistik: Unter H_0 ist die Teststatistik

  $$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_X/\sqrt{n}} \quad \text{t-verteilt mit } (9-1) \text{ Freiheitsgraden}$$

  wobei S_X die geschätzte Standardabweichung ist.
  Mit den gegeben Werten:

  $$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} = \frac{8.52 - 8}{0.937/\sqrt{9}} = 1.66$$

- Verwerfungsbereich: $K = \{|t| \geq t_{8;0.975} = 2.31\}$

b) Der Wert t der Teststatistik liegt im Annahmebereich von H_0 (Annahmebereich $= K^c = \{|t| < t_{8;0.975} = 2.31\}$, d. h. mit diesen Daten kann (zumindest mit dem t-Test) keine signifikante Abweichung der Verschlusszeit von der Einstellung nachgewiesen werden.

c) H_0 und H_A: $\sigma = 0.4$ ist nun bekannt.
Teststatistik: Benutzen nun σ anstelle von S_X, somit ist $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{8.52-8}{0.4/\sqrt{9}} = 3.9$.
Zudem ist T jetzt standardnormalverteilt unter H_0.
Verwerfungsbereich: $K = \{|t| \geq q_{0.975} = 1.96\}$. Wir müssen nun das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Normalverteilung $z_{1-\alpha/2}$ benützen und nicht mehr $t_{n-1,1-\alpha/2}$.

$\Rightarrow$ H_0 wird hier deutlich verworfen.

2. Wir wählen folgende Notation:
A_i = Brenndauer des i-ten Vulkans von Typ A
B_i = Brenndauer des i-ten Vulkans von Typ B

a) Wir wählen einen 2-Stichproben t-Test. Die Annahmen sind:
- $A_1, \ldots, A_{12}, B_1, \ldots, B_{12}$ sind unabhängig.
- $A_i \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu_A, \sigma^2\right)$ und
  $B_j \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu_B, \sigma^2\right)$
  mit μ_A, μ_B, σ^2 unbekannt.

b) Nullhypothese und Alternative lauten:

Nullhypothese H_0 : $\mu_A = \mu_B$
Alternative H_A : $\mu_A \neq \mu_B$ (2-seitig)

c) Teststatistik:

$$\begin{aligned} T = t(A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n) &= \sqrt{\frac{m\cdot n\cdot(m+n-2)}{m+n}}\cdot\frac{\bar{B}_n-\bar{A}_m}{\sqrt{(m-1)S_A^2+(n-1)S_B^2}} \\ t = t(a_1,\ldots,a_{12},b_1,\ldots,b_{12}) &= \sqrt{\frac{12\cdot 12\cdot 22}{24}}\cdot\frac{57.33-60.75}{\sqrt{11\cdot(3.05)^2+11\cdot(2.81)^2}} \\ &= \sqrt{132}\cdot\frac{-3.42}{\sqrt{189.18}} \\ &= -2.8567 \end{aligned}$$

Wir wissen: Unter H_0 ist $T\sim t_{12+12-2}=t_{22}$ verteilt.
Damit ist der Verwerfungsbereich:

$$K=\left\{(a_1,\ldots,a_{12},b_1,\ldots,b_{12})\in\mathbb{R}^{24}\,\Big|\,|t(a_1,\ldots,a_{12},b_1,\ldots,b_{12})|>t_{22,0.975}\right\}$$

Aus der Tabelle der t-Quantile lesen wir: $t_{22,0.975}=2.074$, also

$$K=\left\{(a_1,\ldots,a_{12},b_1,\ldots,b_{12})\in\mathbb{R}^{24}\,\Big|\,|t|>2.074\right\}$$

Da $|t|=2.86>2.074$ ist H_0 zu verwerfen. Die Brenndauern unterscheiden sich somit signifikant.

3. a) X_i = Abweichung des i-ten Trägers, $i=1,\ldots,10$.

- Modell: $X_1,\ldots,X_{10}\ iid \sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$, mit μ und σ^2 unbekannt.
- Nullhypothese und Alternative lauten:
  Nullhypothese H_0 : $\mu=\mu_0=0.012$.
  Alternative H_A : $\mu>\mu_0$.
- Teststatistik:
$$T=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{S}$$
- Verwerfungsbereich für T: $\{T>t_{9;0.95}=1.833\}$.

  Da $T=\sqrt{n}\cdot(\bar{X}_n-\mu_0)/S$ ist, findet man für den Verwerfungsbereich für $\bar{X}_n$ (löse nach $\bar{X}_n$ auf):
  Verwerfungsbereich für $\bar{X}_n$:

  $$\{\bar{x}_n>\mu_0+t_{9;0.95}\frac{s}{\sqrt{n}}\}=\{\bar{x}_{10}>0.012+1.833\cdot 0.001011/\sqrt{10}\}=\{\bar{x}_{10}>0.012586\}.$$

  Da $\bar{x}_{10}=0.0125\notin$ Verwerfungsbereich für $\bar{X}_{10}\Longrightarrow H_0$ nicht verwerfen.

b) Gleich wie oben, aber jetzt mit bekannter Varianz $\sigma^2=0.001^2$.
Verwerfungsbereich für $\bar{X}_n$:

$$\{\bar{x}_n>\mu_0+\Phi^{-1}(1-\alpha)\ \sigma/\sqrt{n}\}=\{\bar{x}_{10}>0.012+1.645\cdot 0.001/\sqrt{10}\}=\{\bar{x}_{10}>0.01252\}.$$

$\bar{x}_{10}=0.0125\notin$ Verwerfungsbereich für $\bar{X}_{10}\Longrightarrow H_0$ nicht verwerfen.

c) Der Fehler 2.Art ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0: $\mu = \mu_0 = 0.012$ beibehalten wird, obwohl eine Alternative H_A: $\mu \in \{0.0125, 0.013, 0.014\}$ richtig ist.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_\mu\left[\text{Fehler 2.Art}\right] &= \mathrm{P}_\mu\left[\bar{X}_n \leq \mu_0 + \Phi^{-1}(1-\alpha)\ \sigma/\sqrt{n}\right] \\
&= \mathrm{P}_\mu\left[\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \Phi^{-1}(1-\alpha)\right] \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \Phi^{-1}(1-\alpha)\right)
\end{aligned}$$

denn unter der Alternative H_A ist $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Somit folgt

$$\mathrm{P}_\mu\left[\text{Fehler 2.Art}\right] = \Phi\left(\frac{0.012 - \mu}{0.001/\sqrt{10}} + 1.645\right) = \begin{cases} \Phi(0.064) & = 0.525 \quad \text{für } \mu = 0.0125 \\ \Phi(-1.517) & = 0.065 \quad \text{für } \mu = 0.013 \\ \Phi(-4.68) & \approx 0 \quad\quad\ \text{für } \mu = 0.014 \end{cases}$$

d) Der Fehler 2.Art ist gegeben durch

$$\mathrm{P}_\mu\left[\text{Fehler 2.Art}\right] = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \Phi^{-1}(1-\alpha)\right).$$

Unter der Alternative H_A ist $\mu_0 - \mu < 0$ und da Φ eine Verteilungsfunktion ist (also monoton wachsend) gilt

$$\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{10}} + \Phi^{-1}(1-\alpha)\right) \geq \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{20}} + \Phi^{-1}(1-\alpha)\right).$$

Daraus folgt: Für einen grösseren Stichprobenumfang wird der Fehler 2.Art kleiner.

Da für $\alpha = 0.01$ ist $\Phi^{-1}(1-\alpha) = 2.326$ und Φ eine Verteilungsfunktion ist (also monoton wachsend) gilt

$$\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + 1.645\right) \leq \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + 2.326\right).$$

Daraus folgt: Für ein kleineres Signifikanzniveau wird der Fehler 2.Art grösser.