Lösungsskizze Übungsserie 11

1. a) Wir schätzen λ durch den Mittelwert $\hat{\lambda} = \bar{X}_3$. Als Schätzwert ergibt sich:

$$\hat{\lambda}(\omega) = \bar{X}_3(\omega) = \frac{4+6+9}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3} = 6.33\,.$$

b) Wir nehmen an, dass die drei Werte von den drei Zuvallsvariablen X_1, X_2 und X_3 erzeugt wurden, $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$.
Betrachte nun die Zufallsvariable

$$\bar{X}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

Gemäss dem Zentralen Grenzwertsatz ist nun

$$\frac{\bar{X}_3 - \mu}{\sigma_{\bar{X}_3}} \overset{\text{approx}}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{mit } \mu = \mathbf{E}\left[\bar{X}_3\right],\ \sigma^2_{\bar{X}_3} = \text{Var}\left(\bar{X}_3\right)$$

Für ein approximatives $(1-\alpha)\cdot 100\%$-Vertrauensintervall gilt folgendes:

$$\text{P}\left[z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_3 - \mu}{\sigma_{\bar{X}_3}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \approx 1-\alpha.$$

Durch Umformen bekommen wir

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \text{P}\left[\bar{X}_3 - \sigma_{\bar{X}_3} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X}_3 - \sigma_{\bar{X}_3} z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \approx 1-\alpha \\
\Leftrightarrow \quad & \text{P}\left[\bar{X}_3 - \sigma_{\bar{X}_3} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X}_3 + \sigma_{\bar{X}_3} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \approx 1-\alpha,
\end{aligned}$$

denn $-z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.
Nun: $\mu = \mathbf{E}\left[\bar{X}_3\right] = \lambda$, $\sigma^2_{\bar{X}_3} = \text{Var}\left(\bar{X}_3\right) = \frac{1}{3}\text{Var}(X_1) = \frac{1}{3}\lambda$.
Also bilden wir den Schätzer $\hat{\sigma}^2_{\bar{X}_3} = \frac{1}{3}\hat{\lambda} = \frac{1}{3}\bar{X}_3$. Dies führt auf:

$$\text{P}\left[\hat{\lambda} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}\hat{\lambda}} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}\hat{\lambda}}\right] \approx 1-\alpha$$

Da $\alpha = 0.05$ folgt aus der Tabelle der Normalverteilungsquantile dass $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Damit bekommt man für unsere Realisierung ω:

$$\hat{\lambda}(\omega) \pm 1.96\sqrt{\frac{1}{3}\hat{\lambda}(\omega)} = 6\frac{1}{3} \pm 2.848 = (3.486, 9.181).$$

Anmerkung: Die Anzahl $n = 3$ ist für den Zentralen Grenzwertsatz noch sehr klein. Alternativ hätte man auch verwenden können, dass die Summe von Poisson(λ_i)-verteilten Zufallsvariablen auch Poisson-verteilt ist, und zwar mit dem Parameter $\sum_i \lambda_i$.

c) 10 liegt nicht im approximativen 95% Vertrauensintervall. Diese Tatsache sagt aber nur wenig über die Wahrscheinlichkeit aus, dass ein einzelnes $X_i(\omega)$ gleich 10 ist. Man bedenke, dass uns das Vertraueninterval nur einen wahrscheinlichen Bereich für den *wahren* Parameter (hier λ) angibt. Es kann also durchaus so sein, dass der Wert 10 für eine Realisierung unserer Zufallsvariablen sehr hohe Wahrscheinlichkeit hat. Ist etwa der wahre Parameter $\lambda = 9$, so gilt $\mathrm{P}[X_i = 10] = \frac{9^{10}}{10!} \cdot e^{-9} \approx 0.118$. Die Wahrscheinlichkeit 10 Fasern zu beobachten, ist beinahe 12% (sic!).

2. a)

$$f_\theta(x) = F'_\theta(x) = -\exp(-\theta\sqrt{x})\frac{-\theta}{2\sqrt{x}} = \frac{\exp(-\theta\sqrt{x}) \cdot \theta}{2\sqrt{x}}$$

b) Sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim F$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \int_0^\infty x f_\theta(x)\,dx = \frac{\theta}{2}\int_0^\infty \sqrt{x}\exp(-\theta\sqrt{x})\,dx \\
&\overset{t=\sqrt{x}}{=} \frac{\theta}{2}\int_0^\infty t\exp(-\theta t)2t\,dt = \frac{\theta}{2}\int_0^\infty \frac{4t}{\theta}\exp(-\theta t)\,dt \\
&= \frac{\theta}{2}\int_0^\infty \frac{4}{\theta^2}\exp(-\theta t)\,dt = \frac{\theta}{2}\frac{(-4)}{\theta^3}\exp(-\theta t)\Big|_0^\infty = \frac{\theta}{2}\frac{4}{\theta^3} = \frac{2}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

c) Der Momentenschätzer beruht auf dem Gesetz der grossen Zahlen:

$$\frac{2}{\theta^2} = \mathbf{E}[X] \approx \bar{X}_n \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{2}{\bar{X}_n}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}}.$$

d) Für Maximum-Likelihood brauchen wir die log-Likelihood-Funktion:

$$\ell(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \log\left(\prod_{i=1}^n \frac{\theta}{2}\frac{\exp(-\theta\sqrt{x_i})}{\sqrt{x_i}}\right) = n\log(\theta) - n\log(2) - \theta\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} - \sum_{i=1}^n \log(\sqrt{x_i}).$$

Zufallsvariablen einsetzen, Ableiten und Nullsetzen ergibt:

$$\frac{d}{d\theta}\ell(X_1,\ldots,X_n,\hat{\theta}_{ML}) = \frac{n}{\hat{\theta}_{ML}} - \sum_{i=1}^n \sqrt{X_i} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}}.$$

3. a) Sei X der Zufallsvektor $X = (X_1,\ldots,X_n)$ Wir beginnen mit dem Aufstellen der Log-Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned}
\ell(x_1,\ldots,x_n,\theta) &= \log\left(\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^n (1+x_i)^{-(1+\frac{1}{\theta})}\right) \\
&= -n\log(\theta) - (1+\frac{1}{\theta})\sum_{i=1}^n \log(1+x_i)
\end{aligned}$$

Zufallsvariablen einsetzen, Ableiten und Nullsetzen:

$$\frac{d}{d\theta}\ell(X_1,\ldots,X_n,\hat{\theta}_{ML}) = -\frac{n}{\hat{\theta}_{ML}} + \frac{1}{\hat{\theta}_{ML}^2}\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i) \stackrel{!}{=} 0.$$

Auflösen nach $\hat{\theta}_{ML}$ ergibt den Maximum-Likelihood-Schätzer:

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i) = t_n(X) = T_n,$$

was zu zeigen war.

b) Nein. Dafür gibt es keinen Grund: $\theta \in (0,\infty)$.

c) Man sieht leicht:

$$\mathbf{E}\left[t_n(X)\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\log(1+X_i)\right] = \mathbf{E}\left[\log(1+X_1)\right].$$

Sei Y eine Zufallsvariable mit $Y \sim Exp(\frac{1}{\theta})$. Dann gilt für Y bekanntlich: $\mathbf{E}\left[Y\right] = \theta$ und $\mathrm{Var}\left(Y\right) = \theta^2$. Mit dem Hinweis und obiger Rechnung sehen wir nun, dass $\mathbf{E}\left[t_n(X)\right] = \mathbf{E}\left[Y\right] = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta$.

Ähnlich kann man für die Varianz schliessen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(t_n(X)\right) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1+X_i)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left(\log(1+X_i)\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(\log(1+X_1)\right)\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(Y\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{\frac{1}{\theta^2}} = \frac{1}{n}\theta^2.\end{aligned}$$

Bemerkung 1: Man kann selbstverständlich die gesuchten Grössen $\mathbf{E}\left[t_n(X)\right]$ und $\mathrm{Var}\left(t_n(X)\right)$ auch direkt durch Integrieren finden.

Bemerkung 2: Beweis des Hinweises:

$$\begin{aligned}F(y) &= \mathrm{P}\left[Y \le y\right] = \mathrm{P}\left[\log(1+X) \le y\right] = \mathrm{P}\left[X \le e^y - 1\right]\\ &= \int_0^{e^y-1}\frac{1}{\theta}(1+t)^{-(1+\frac{1}{\theta})}\,dt \stackrel{s=\log(t+1)}{=} \int_0^y \frac{1}{\theta}(e^s)^{-(1+\frac{1}{\theta})}\cdot e^s ds\\ &= \int_0^y \frac{1}{\theta}(e^s)^{-\frac{1}{\theta}}ds.\end{aligned}$$

Folglich ist die Dichte von Y:

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}.$$

d) Aus **c)** folgt, dass $\mathbf{E}\left[t_n(X)\right] = \theta$, und dies ist die Erwartungstreue.

e) Die Chebychev-Ungleichung auf dem Aufgabenblatt liefert:

$$P[|t_n(X)-\theta| > \epsilon] \le \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}\left(t_n(X)\right) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n}\theta^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \forall\epsilon > 0.$$

Dies beweist die Konsistenz.