

Lösungsskizze Übungsserie 7

1. Seien:

T = Lebenszeit des Systems

T_i = Lebenszeit der i -ten Komponente, $i = 1, \dots, 6$.

Für $x \in [0, 10]$ gilt:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P[T \leq x] \\
 &= P[(\{T_1 \leq x\} \cup \{T_2 \leq x\}) \cap (\{T_3 \leq x\} \cup \{T_4 \leq x\}) \cap (\{T_5 \leq x\} \cup \{T_6 \leq x\})] \\
 &= (P[\{T_1 \leq x\} \cup \{T_2 \leq x\}])^3 \\
 &= (P[\{T_1 \leq x\}] + P[\{T_2 \leq x\}] - P[\{T_1 \leq x\} \cap \{T_2 \leq x\}])^3 \\
 &= \left(\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100}\right)^3
 \end{aligned}$$

Und mit $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$:

$$f(x) = 3 \left(\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{x}{50}\right).$$

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_0^{10} x f(x) dx \\
 &= \int_0^{10} \left(\frac{3}{125} x^3 - \frac{3}{625} x^4 + \frac{3}{10000} x^5 - \frac{3}{500000} x^6\right) dx \\
 &= \frac{3}{500} x^4 - \frac{3}{3125} x^5 + \frac{1}{20000} x^6 - \frac{3}{3500000} x^7 \\
 &= \frac{38}{7}
 \end{aligned}$$

2. a) Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 0 (kein Gewinn) und c (Gewinn) an.
 Die Zufallsvariable Y nimmt die Werte 0 (kein Gewinn in beiden Lotterien), c (Gewinn nur in einer der beiden Lotterien) und $2c$ (Gewinn in beiden Lotterien).

Für X gilt (Erinnerung: Nur ein Los gewinnt):

$$P[X = c] = P[\text{ein Los gewinnt}] = \frac{2}{n}$$

$$P[X = 0] = P[\text{beide Lose geben keinen Gewinn}] = 1 - P[X = c] = \frac{n-2}{n}$$

Für Y gilt:

$$P[Y = 0] = P[\text{kein Gewinn in beiden Lotterien}] = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$P[Y = c] = P[\text{Gewinn nur in einer der beiden Lotterien}] = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{2n-2}{n^2}$$

$$P[Y = 2c] = P[\text{Gewinn in beiden Lotterien}] = \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Beachte: die Summe $P[Y = 0] + P[Y = c] + P[Y = 2c]$ soll 1 geben!

b) Man findet:

$$E[X] = 0 \cdot \frac{n-2}{n} + c \cdot \frac{2}{n} = \frac{2c}{n}$$

$$E[Y] = 0 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + c \cdot \frac{2n-2}{n^2} + 2c \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2c}{n}$$

D.h. beide "Strategien" X und Y haben den gleichen Erwartungswert (erwarteten Gewinn).

c) Mit $g(z) = (z - \frac{2c}{n})^2$ hat man:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[g(X)] = g(0) \cdot \frac{n-2}{n} + g(c) \cdot \frac{2}{n} = \left(-\frac{2c}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \left(c - \frac{2c}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \\ &= \frac{4c^2}{n^2} - \frac{8c^2}{n^3} + \frac{2c^2}{n} - \frac{8c^2}{n^2} + \frac{8c^2}{n^3} = \frac{2c^2}{n^2}(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{Var}[Y] = E[g(Y)] = g(0) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + g(c) \cdot \frac{2n-2}{n^2} + g(2c) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2c^2}{n^2}(n-1)$$

Es gilt: $\text{Var}[X] < \text{Var}[Y]$, d.h. mit der "Strategie" X hat man eine kleinere Streuung des Gewinnes.

3. a)

$$\begin{aligned} P[Z \leq z] &= P[X \leq z + Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z+y} f(x, y) dx \right) dy \\ &\stackrel{w=x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^z f(w+y, y) dw \right) dy = \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(w+y, y) dy \right) dw \end{aligned}$$

Und daraus folgt:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z+y, y) dy.$$

b) $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{z+y \geq 0\}} e^{-\lambda(z+y)} 1_{\{y \geq 0\}} e^{-\lambda y} dy = \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda(z+y)} e^{-\lambda y} dy \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda y} dy = \lambda^2 e^{-\lambda z} \frac{1}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

$z \leq 0$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{z+y \geq 0\}} e^{-\lambda(z+y)} 1_{\{y \geq 0\}} e^{-\lambda y} dy = \lambda^2 \int_{-z}^{\infty} e^{-\lambda(z+y)} e^{-\lambda y} dy \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_{-z}^{\infty} e^{-2\lambda y} dy = \lambda^2 e^{-\lambda z} \frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda z} = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda z}. \end{aligned}$$

$$\text{Das heisst: } f_Z(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|z|}$$