Lösungsskizze Übungsserie 6

1. **a)** Die Fläche von Q ist $4 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 2$.
Dann ist die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } (x,y) \in Q \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Randdichte $f_X(x)$: 2 Fälle zu unterscheiden.

- Für $-1 \leq x \leq 0$ gilt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_{-1-x}^{1+x} = \frac{1}{2}(1+x+1+x) = 1+x$$

- Für $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_{-1+x}^{1-x} = \frac{1}{2}(1-x+1-x) = 1-x$$

D.h.:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randdichte $f_Y(y)$: analog dank der Symmetrie.
Oder berechne wie früher (2 Fälle zu unterscheiden).

- Für $-1 \leq y \leq 0$ gilt

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-1-y}^{1+y} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-1-y}^{1+y} = \frac{1}{2}(1+y+1+y) = 1+y$$

- Für $0 \leq y \leq 1$ gilt

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-1+y}^{1-y} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-1+y}^{1-y} = \frac{1}{2}(1-y+1-y) = 1-y$$

D.h.:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+y & \text{falls } -1 \leq y \leq 0 \\ 1-y & \text{falls } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Wegen $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ sind die Zufallsvariablen X und Y abhängig.

d) Dank der Symmetrie kann man schliessen, dass in diesem Fall die Randdichten gleich und konstant auf dem Intervall $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ sind.
D.h.:

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{falls } -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig.

2. **a)** X beschreibt die Anzahl der Erfolge (Todesfälle) bei $n = 20$ unabhängigen 0-1-Experimenten (Fisch stirbt oder nicht) mit Erfolgsparameter $p = 0.3$.
D.h. $X \sim \text{Bin}\,(n = 20, p = 0.3)$.

b) Anzahl seltener Ereignisse in einem Zeitintervall: Poissonverteilung mit Parameter λ="durchschnittliche Anzahl".

i) $Y_1 \sim \text{Pois}\,(\lambda = 4)$

ii) $Y_2 \sim \text{Pois}\,(\lambda = 12)$

c) Z beschreibt die Anzahl der Erfolge (erscheinenden Passagiere) bei $n = 140$ unabhängigen 0-1-Experimenten (Passagier erscheint oder nicht) mit Erfolgsparameter $p = 0.86$.
D.h. $Z \sim \text{Bin}\,(n = 140, p = 0.86)$.

3. **a)** Durch Standardisieren und mit Hilfe der Tabelle der Standard-Normalverteilung findet man

$$\begin{aligned} \text{P}\,[990 \le R \le 1010] &= \text{P}\,[R \le 1010] - \text{P}\,[R \le 990] \\ &= \text{P}\left[\frac{R-\mu}{\sigma} \le \frac{1010-\mu}{\sigma}\right] - \text{P}\left[\frac{R-\mu}{\sigma} \le \frac{990-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\big(\frac{1010-\mu}{\sigma}\big) - \Phi\big(\frac{990-\mu}{\sigma}\big) \\ &= \Phi\big(\sqrt{2}\big) - \Phi\big(-\sqrt{2}\big) \;=\; 0.92 - (1-0.92) \;=\; 0.84. \end{aligned}$$

b) Es muss gelten:

$$\text{P}\,[R \ge c] \overset{!}{=} 0.9\,.$$

Daraus folgt

$$\text{P}\,[R \le c] = \text{P}\left[\frac{R-\mu}{\sigma} \le \frac{c-\mu}{\sigma}\right] = 0.1\,,$$

und folglich

$$\frac{c-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.1) = -\Phi^{-1}(0.9)\,.$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\Phi(x) = p \iff \Phi(-x) = 1-p\,.$$

Somit

$$c = \mu - \Phi^{-1}(0.9)\sigma = 1000 - 1.28\sqrt{50} = 990.95.$$

c) $\text{P}\,[R > 1020] = 1 - \text{P}\,[R \le 1020] = 1 - \text{P}\left[\frac{R-\mu}{\sigma} \le \frac{1020-\mu}{\sigma}\right] = 1 - \Phi(2\sqrt{2}) = 0.0023$

d) $\text{P}\,[R > 1010] = 1 - \text{P}\,[R \le 1010] = 1 - \Phi(\sqrt{2}) = 0.08$

$\text{P}\,[R > 1020 | R > 1010] = \frac{\text{P}[R>1020]}{\text{P}[R>1010]} = \frac{0.0023}{0.08} = 0.03$