Lösungsskizze Übungsserie 5

1. a) Kumulative Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}[Y \leq y] = \mathrm{P}\left[e^X \leq y\right] \overset{(y \geq 0)}{=} \mathrm{P}[X \leq \log y] \\ &= \mathrm{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\log y - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\Big(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\Big). \end{aligned}$$

Dichte

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \Phi\Big(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\Big) \overset{(y \geq 0)}{=} \varphi\Big(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\Big) \cdot \frac{1}{\sigma y} \\ &= \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\Big(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\Big). \end{aligned}$$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\mathrm{P}[Y > 100] = 1 - \mathrm{P}[Y \leq 100] = 1 - \Phi\Big(\frac{\log 100 - 4}{\sqrt{0.5}}\Big) = 1 - \Phi(0.86) = 1 - 0.805 = 0.195.$$

2. X = Anzahl Anrufe pro Sekunde, $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.
Durchschnittlich gibt es 50000 Anrufe pro Tag. Die durchschnittliche Anzahl Anrufe pro Sekunde ist also

$$\lambda := \frac{50000}{60 \cdot 60 \cdot 24} = 0.58.$$

a) Der Überlastungspunkt N ist definiert durch: $\mathrm{P}[X \geq N] \overset{!}{\leq} 0.001$.

$$\mathrm{P}[X \geq N] = 1 - \mathrm{P}[X \leq N-1] = 1 - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

Durch Probieren findet man für $N = 4$

$$\mathrm{P}[X \geq N] = 1 - 0.997 = 0.003 > 0.001$$

und für $N = 5$

$$\mathrm{P}[X \geq N] = 1 - 0.9996 = 0.0004 < 0.001.$$

Somit ist der Überlastungspunkt $N = 5$.

b) $N = 8.64 \cdot \lambda \implies$ Die Telefonzentrale ist erst überlastet, wenn mehr als das 8.5-fache der durchschnittlichen Anzahl Anrufe stattfindet.

3. a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}[X=j] &= \sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{j}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}-1}{\frac{1}{2}-1} \\
&= 2-2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^j, \text{ für } j \geq 1.
\end{aligned}
$$

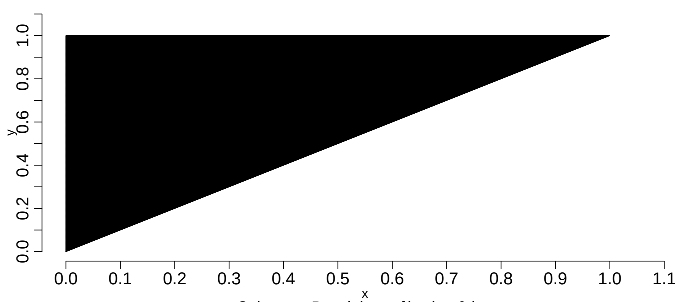
$$
\mathrm{P}[Y=k] = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k, \text{ für } k \geq 2.
$$

$$
\mathrm{P}[X=j|Y=k] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k} = \frac{1}{k-1}, \text{ für } k \geq 2,\ j=1,\ldots,k-1.
$$

$$
\mathrm{P}[Y=k|X=j] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)^j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j}, \text{ für } j \geq 1,\ k>j.
$$

b)

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_x^1 f(x,y)dy = \int_0^{1-x} f(x,y)dy = 2\cdot(1-x),\ x\in[0,1]. \\
f_Y(y) &= \int_0^y f(x,y)dx = 2y,\ y\in[0,1].
\end{aligned}
$$



Schwarz: Bereich wo f(x,y) > 0 ist.