

Lösungsskizze Übungsserie 4

1. a) Die Dichte muss zu eins aufintegrieren, deshalb gilt:

$$\int_7^{10} c(x-7)^2 dx \stackrel{!}{=} 1$$

1.Version: Polynom ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} \int_7^{10} c(x-7)^2 dx &= c \cdot \int_7^{10} x^2 - 14x + 49 dx \\ &= c \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{14}{2}x^2 + 49x \right) \Big|_7^{10} \\ &= \left(\frac{1}{3}10^3 - 7 \cdot 10^2 + 49 \cdot 10 - \frac{1}{3}7^3 + 7 \cdot 7^2 - 49 \cdot 7 \right) \\ &= c \cdot 9 \end{aligned}$$

2.Version: Mit Substitution:

$$\begin{aligned} \int_7^{10} c(x-7)^2 dx &\stackrel{y:=x-7}{=} c \cdot \int_0^3 y^2 dx \\ &= c \cdot \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^3 \\ &= c \cdot \frac{1}{3}(3^3 - 0) \\ &= c \cdot 3^2 \\ &= c \cdot 9 \end{aligned}$$

d.h. $c = \frac{1}{9}$.

Der geübte Student wird die Stammfunktion auch direkt ohne Ausmultiplizieren oder Substitution finden.

b) $F(x) = P[X \leq x] = \int_7^x c(z-7)^2 dz = c \frac{(x-7)^3}{3} = \frac{(x-7)^3}{27} \quad (7 \leq x \leq 10).$

c) $P[8 < X < 9] = F(9) - F(8) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}.$

2. a) Jede Flasche kann zurückgebracht werden oder nicht, unabhängig von den anderen $\Rightarrow$ 0-1-Experiment $\Rightarrow$ Binomialverteilung. Die Erfolgswahrscheinlichkeit für ein 0-1-Experiment ist $p = 0.03$ (Nicht-Zurückbringen wird hier ausnahmsweise als Erfolg gewertet), und es werden 37 Experimente durchgeführt. Daher:

$$X \sim \text{Bin}(n = 37, p = 0.03)$$

b)

$$\begin{aligned}
P[X > 2] &= 1 - P[X \leq 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] \\
&= 1 - \binom{37}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{37} - \binom{37}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{36} - \binom{37}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{35} \\
&= 1 - \frac{37!}{0!37!} \cdot 0.03^0 \cdot 0.97^{37} - \frac{37!}{1!36!} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^{36} - \frac{37!}{2!35!} \cdot 0.03^2 \cdot 0.97^{35} \\
&= 1 - 0.3240 - 37 \cdot 0.0100208 - 666 \cdot 0.0003099 \\
&= 1 - 0.3240 - 0.37077 - 0.20641 \\
&= 0.098814.
\end{aligned}$$

c) Y wird $k-1$ mal zurückgebracht und beim k .ten Mal nicht mehr. Werten wir wieder das Nicht-Zurückbringen als Erfolg, so beschreibt Y die Wartezeit bis zum ersten Erfolg $\Rightarrow Y$ hat eine geometrische Verteilung, dh. $P[Y = k] = (1-p)^{k-1} \cdot p$, mit Erfolgsparameter $p = 0.03$.

d)

$$\begin{aligned}
P[Y > 41] &= 1 - P[Y \leq 41] \\
&= 1 - P[Y = 1] - P[Y = 2] - \dots - P[Y = 41] \\
&= 1 - (1-p)^0 \cdot p - (1-p)^1 \cdot p - \dots - (1-p)^{40} \cdot p \\
&= 1 - p \cdot [(1-p)^0 + (1-p)^1 + \dots + (1-p)^{40}] \\
&= 1 - p \cdot \frac{(1-p)^{41} - 1}{(1-p) - 1} = 1 - p \cdot \frac{(1-p)^{41} - 1}{-p} \\
&= 1 + (1-p)^{41} - 1 = (1-p)^{41} = 0.97^{41} = 0.28684.
\end{aligned}$$

Das Ganze geht auch viel einfacher:

$$\begin{aligned}
&P[\text{eine Flasche wird mehr als 40mal zurückgebracht}] \\
&= P[\text{die Flasche wird die ersten 41 mal zurückgebracht}] \\
&= (1-p)^{41} = 0.28684.
\end{aligned}$$

3. a)

$$P[E_m] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(km)^{-s}}{\zeta(s)} = m^{-s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{-s}}{\zeta(s)} = m^{-s} \cdot \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} = m^{-s}.$$

b) Beweis des Hinweises:

" $\Rightarrow$ " Sei x durch p und q teilbar, wobei p und q prim. $\Rightarrow$ Primfaktorzerlegung von x enthält p^k, q^l mit $k, l \geq 1$. $\Rightarrow$ Primfaktorzerlegung enthält $(pq)^{\min(k,l)}$ mit $\min(k,l) \geq 1$. $\Rightarrow pq$ teilt x .

" $\Leftarrow$ " pq teilt $x \Rightarrow x = k \cdot pq$ für ein $k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = (kq) \cdot p \Rightarrow p$ teilt x . Analog zeigt man q teilt x .

□

Jetzt kann man schliessen:

$$P[E_p \cap E_q] = P[E_{pq}] = (pq)^{-s} = p^{-s} \cdot q^{-s} = P[E_p] \cdot P[E_q].$$

Also sind E_p und E_q unabhängig.

- c) Der Hinweis beweist sich analog oben. Sei nun $J \subset \{p_1, \dots, p_k\}$ beliebige Teilmenge.
Dann:

$$\mathrm{P} \left[\bigcap_{j \in J} E_j \right] = \mathrm{P} \left[E_{\prod_{j \in J} j} \right] = \left(\prod_{j \in J} j \right)^{-s} = \prod_{j \in J} j^{-s} = \prod_{j \in J} \mathrm{P} [E_j].$$

- d) Einerseits:

$$\mathrm{P} \left[\bigcap_p E_p^c \right] = \mathrm{P} [X = 1] = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Und andererseits:

$$\mathrm{P} \left[\bigcap_p E_p^c \right] = \prod_p \mathrm{P} [E_p^c] = \prod_p (1 - \mathrm{P} [E_p]) = \prod_p (1 - p^{-s}).$$

Kombination der letzten beiden Gleichungsketten ergibt die Eulersche Formel.