Lösungsskizze Übungsserie 2

1. **a)**
$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}[A] & = \frac{1198}{1647} = 0.73 & \text{W'keit, dass Kandidat/in männl. ist (Anteil Männer).} \\
\mathrm{P}[B|A] & = \frac{825}{1198} = 0.69 & \text{W'keit, dass sich ein Mann bei Dep. I bewirbt.} \\
\mathrm{P}[B|A^c] & = \frac{108}{449} = 0.24 & \text{W'keit, dass sich eine Frau bei Dep. I bewirbt.} \\
\mathrm{P}[A \cap C] & = \frac{533}{1647} = 0.32 & \text{W'keit, dass Kandidat/in ein zugelassener Mann ist.} \\
\mathrm{P}[A^c \cap C] & = \frac{113}{1647} = 0.07 & \text{W'keit, dass Kandidat/in eine zugelassene Frauen ist.}
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{P}[B] & = \mathrm{P}[B|A] \cdot \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B|A^c] \cdot \mathrm{P}[A^c] \\
 & = \mathrm{P}[B|A] \cdot \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B|A^c] \cdot (1 - \mathrm{P}[A]) = 0.57 \\
\mathrm{P}[C] & = \mathrm{P}[A \cap C] + \mathrm{P}[A^c \cap C] = 0.39 \\
\mathrm{P}[A \cap B] & = \mathrm{P}[B|A] \cdot \mathrm{P}[A] = 0.50 \\
\mathrm{P}[A^c \cap B] & = \mathrm{P}[B|A^c] \cdot \mathrm{P}[A^c] = 0.06 \\
\mathrm{P}[C|A] & = \frac{\mathrm{P}[A \cap C]}{\mathrm{P}[A]} = 0.44 \quad \text{W'keit, dass ein Mann zugelassen wird.} \\
\mathrm{P}[C|A^c] & = \frac{\mathrm{P}[A^c \cap C]}{\mathrm{P}[A^c]} = 0.25 \quad \text{W'keit, dass eine Frau zugelassen wird.}
\end{array}
$$

c) Die letzten zwei Zeilen von b) deuten auf eine ungerechte Behandlung der Frauen hin: Ein männlicher Bewerber wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 44% zugelassen, eine Frau aber nur mit 25%.

d)
$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}[C|A \cap B] & = \frac{511}{825} = 0.62 & \text{Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann an Dep. I zugelassen wird.} \\
\mathrm{P}[C|A^c \cap B] & = \frac{89}{108} = 0.82 & \text{Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau an Dep. I zugelassen wird.} \\
\mathrm{P}[C|A \cap B^c] & = \frac{22}{373} = 0.06 & \text{Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann an Dep. II zugelassen wird.} \\
\mathrm{P}[C|A^c \cap B^c] & = \frac{24}{341} = 0.07 & \text{Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau an Dep. II zugelassen wird.}
\end{array}
$$

e) Betrachten wir die Departemente gesondert, so sehen wir, dass bei beiden Departementen die Frauen eine grössere Wahrscheinlichkeit haben, zugelassen zu werden!

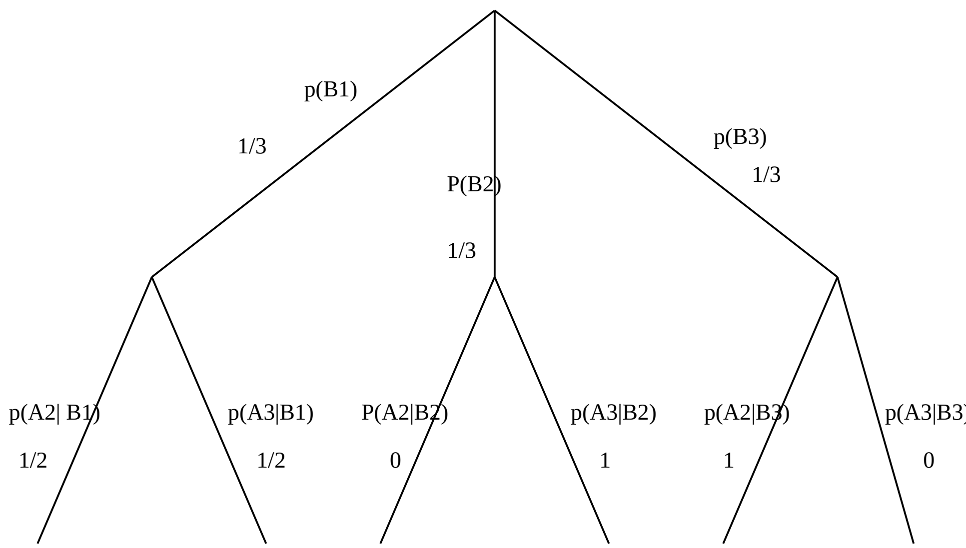
f)
$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}[C|B] & = \frac{600}{933} = 0.64 & \text{Wahrscheinlichkeit, an Dep. I zugelassen zu werden.} \\
\mathrm{P}[C|B^c] & = \frac{46}{714} = 0.06 & \text{Wahrscheinlichkeit, an Dep. II zugelassen zu werden.}
\end{array}
$$

Die Erklärung für das scheinbare Paradox liegt darin, dass sich bei Departement I, wo relativ viele Bewerber zugelassen werden, nur wenige Frauen bewarben. Für die schwerer zu bestehende Zulassungsprüfung ins Departement II meldeten sich dagegen ungefähr gleich viele Frauen wie Männer an, also über drei mal mehr Frauen als in Departement I bei weniger als der Hälfte der Männer. Also macht bei den Frauen Departement II einen viel grösseren Anteil aus, und damit hat auch die hohe Durchfallquote einen viel grösseren Einfluss auf die Gesamtquote.

Zusammenfassend muss man wohl sagen: Die Daten beweisen weder eine Benachteiligung noch eine Bevorzugung der Bewerberinnen. Man kann sich zum Beispiel immer noch auf den Standpunkt stellen, dass die Universität Frauen benachteiligt, indem sie im von Frauen bevorzugten Departement höhere Durchfallquoten aufrechterhält. Die vorliegenden Daten schweigen sich darüber aus.

Was wir in diesem Beispiel vor allem lernen können: statistische Aussagen sind mit Vorsicht zu interpretieren, sonst wird etwas hineininterpretiert, was gar nicht dasteht — typischerweise ein Kausalzusammenhang. Aus “die Wahrscheinlichkeit, aufgenommen zu werden, ist für Männer grösser als für Frauen” wird “Bei den Aufnahmeprüfungen werden Frauen gegenüber Männern benachteiligt”!

2. OBdA wählt der Kandidat die Tür 1. (D.h. der Kandidat könnte auch Tür 2 oder 3 wählen, ohne dass sich etwas an der Aussage zur Strategie ändern würde.) Dann betrachte man folgendes Diagramm:



Die Ereignisse $A_i, i = 1 \ldots 3$ und $B_i, i = 1 \ldots 3$ bedeuten das folgende:
B_i = “Das Auto steht hinter Türe i”
A_i = “Der Showmaster zeigt Türe i”
Nun berechnet man mit Hilfe des Diagramms folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten:
Zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Ereignisse, wenn der Showmaster Tür 2 öffnet.

$$p(B_1|A_2) = \frac{p(A_2|B_1)p(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} p(A_2|B_i)p(B_i)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$
$$p(B_2|A_2) = 0$$
$$p(B_3|A_2) = \frac{p(A_2|B_3)p(B_3)}{\sum_{i=1}^{3} p(A_2|B_i)p(B_i)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Die Interpretation ist nun folgende: Wenn der Kandidat nicht wechselt, so kommt für ihn die Wahrscheinlichkeit $p(B_1|A_2)$ in Frage, da er immer noch darauf vertraut, dass das Auto hinter Tür 1 ist (B_1), nachdem der Showmaster Tür 2 (A_2) gezeigt hat. Das Wechseln entspräche der Wahrscheinlichkeit $p(B_3|A_2)$, da er sich dann dafür entscheiden würde, das Auto sei wahrscheinlich hinter Tür 3 (B_3), nachdem der Showmaster Tür 2 (A_2) gezeigt hat. Wie man sieht, ist Wechseln günstiger.
Eine analoge Rechnung mit gleichem Ergebnis lässt sich auch für das, was “geschieht”, wenn der Showmaster Tür 3 öffnet, ausführen.

oder anders:

Das Problem enthält zwei Zufallsmechanismen:

- A: Das Plazieren des Autos hinter einer der beiden Türen.
- B: Die Türwahl des Kandidaten.

Der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum ist daher:

$$\Omega = \{(i,k)|i \in 1\ldots3, j \in 1\ldots3\},$$

wobei der erste Eintrag der geordneten Paare angibt, hinter welcher Tür das Auto steht (Zufallsexperiment A) und der zweite Eintrag für die Türwahl des Kandidaten (Zufallsexperiment B) steht.

Je nachdem, ob der Kandidat nach der Interpellation des Showmasters die Tür wechselt, gibt es nun 2 Situationen:

Fall 1: Tür beibehalten

Der Kandidat gewinnt, falls ein Elementarereignis ω aus der Menge $G_1 \in \Omega$ eintritt, wobei:

$$G_1 = \{\omega \in \Omega | i = k\}.$$

Dabei kommt es nicht darauf an, welche Tür vom Quizmaster als Alternative angeboten wird.

Es gilt daher:

$$\mathrm{P}\left[\text{Auto gewinnen}\right] = \mathrm{P}\left[G_1\right] = \frac{|G_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Fall 2: Tür wechseln

Jetzt gewinnt der Kandidat, falls $\omega \in G_2$, wobei

$$G_2 = \{\omega \in \Omega | i \neq k\}.$$

Dies ist der Fall, da der Showmaster zum Öffnen einer Alternativtür nur noch eine Möglichkeit hat: Ist das Auto nicht hinter der vom Kandidaten gewählten Tür i, sondern hinter Tür $j \neq i$, so kann der Showmaster keine der beiden Türen i und j öffnen, der Kandidat gewinnt daher garantiert bei Wechsel zur Tür j.

Es gilt also:

$$\mathrm{P}\left[\text{Auto gewinnen}\right] = \mathrm{P}\left[G_2\right] == \frac{|G_2|}{|\Omega|} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Der Kandidat sollte also die Tür wechseln.

3. a) Zum Beispiel:

- IN1 und IN2 sind disjunkte Ereignisse, da ein Kandidat, der das erste Bewerbungsgespräch übersteht, gar nicht zum zweiten antreten muss.
- ...

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}] &= \mathrm{P}[\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}|A]\,\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}|B]\,\mathrm{P}[B] \\
&\quad + \mathrm{P}[\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}|C]\,\mathrm{P}[C] \\
&= \mathrm{P}[\mathrm{IN1}|A]\,\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[\mathrm{IN2}|A]\,\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[\mathrm{IN1}|B]\,\mathrm{P}[B] \\
&\quad + PR\mathrm{IN2}|B\,\mathrm{P}[B] + \mathrm{P}[\mathrm{IN1}|C]\,\mathrm{P}[C] + \mathrm{P}[\mathrm{IN2}|C]\,\mathrm{P}[C] \\
&= (0.5 + 0.3 * 0.5 + 0.2 + 0.4 * 0.5 + 0 + 0.2 * 0.5)/3 = 0.3833,
\end{aligned}$$

wobei wir $\mathrm{P}[\mathrm{IN2}|A] = \mathrm{P}[\mathrm{Chance}|A] \cdot 0.5$ verwendet haben.

c)

$$\mathrm{P}[A|\mathrm{OUT1} \cup \mathrm{OUT2}] = \frac{\mathrm{P}[\mathrm{OUT1} \cup \mathrm{OUT2}|A]\,\mathrm{P}[A]}{\mathrm{P}[\mathrm{OUT1} \cup \mathrm{OUT2}|A]\,\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[\mathrm{OUT1} \cup \mathrm{OUT2}|B]\,\mathrm{P}[B] + \mathrm{P}[\mathrm{OUT1} \cup \mathrm{OUT2}|C]\,\mathrm{P}[C]}$$

Zähler=(0.2+0.5*0.3)*1/3
Nenner=(0.2+0.5*0.3+0.4+0.5*0.4+0.8+0.5*0.2)*1/3
Resultat: 7/37

d)

$$\mathrm{P}[\mathrm{Chance}|\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}] = \frac{\mathrm{P}[\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}|\mathrm{Chance}]\,\mathrm{P}[\mathrm{Chance}]}{\mathrm{P}[\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}|\mathrm{Chance}]\,\mathrm{P}[\mathrm{Chance}] + \mathrm{P}[\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}|\mathrm{IN1}]\,\mathrm{P}[\mathrm{IN1}] + \mathrm{P}[\mathrm{IN1} \cup \mathrm{IN2}|\mathrm{OUT1}]\,\mathrm{P}[\mathrm{OUT1}]}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[\mathrm{Chance}] &= \mathrm{P}[\mathrm{Chance}|A]\,\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[\mathrm{Chance}|B]\,\mathrm{P}[B] + \mathrm{P}[\mathrm{Chance}|C]\,\mathrm{P}[C] \\
&= 0.3 * 1/3 + 0.4 * 1/3 + 0.2 * 1/3 = 0.3 \\
\mathrm{P}[\mathrm{IN1}] &= \mathrm{P}[\mathrm{IN1}|A]\,\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[\mathrm{IN1}|B]\,\mathrm{P}[B] + \mathrm{P}[\mathrm{IN1}|C]\,\mathrm{P}[C] = \\
&= 0.5 * 1/3 + 0.2 * 1/3 + 0 = 0.233333
\end{aligned}$$

Zähler=0.5*$\mathrm{P}[\mathrm{Chance}]$
Nenner=0.5*$\mathrm{P}[\mathrm{Chance}] + 1 * \mathrm{P}[\mathrm{IN1}] + 0$
Zähler/Nenner=1/(1+2*$\mathrm{P}[\mathrm{IN1}]$ / $\mathrm{P}[\mathrm{Chance}]$)=0.394.