Kombinatorik kurz und knapp

Diese Notizen geben einen kurzen Überblick über die (wenigen) Resultate aus der Kombinatorik, die man sich wirklich merken sollte. Es gibt wesentlich mehr Formeln; aber es ist einfacher und effizienter, sich die Formeln inklusive ihrer Herleitungen von hier zu merken und sich andere Resultate bei Bedarf direkt zu überlegen.

Betrachten wir also n verschiedene Objekte.

1) Auf wie viele Arten kann man diese n Objekte (z.B. nebeneinander) anordnen?

Diese Anzahl heisst die Anzahl der *Permutationen (ohne Wiederholung)* von n Elementen und ist

$$n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Das Argument für die Herleitung geht so: Das erste Objekt in der Anordnung kann man beliebig aus den insgesamt n wählen; es gibt dafür also n Möglichkeiten. Das zweite Objekt in der Anordnung kann man aus den noch verbleibenden $n-1$ Objekten wählen; es gibt also dafür noch $n-1$ Möglichkeiten, und jede davon kann man mit jeder der n Möglichkeiten für das erste Objekt kreuzen, so dass insgesamt $n \times (n-1)$ Möglichkeiten für die ersten zwei Plätze entstehen. Für das dritte Objekt hat man noch $n-2$ zur Auswahl, usw.; das letzte (n-te) Objekt kann nur noch auf 1 Art gewählt werden, weil nur noch eines da ist, und auf diese Art erhält man die Formel.

2) Auf wie viele Arten kann man k aus den n Objekten auswählen (mit $k \leq n$ und ohne Zurücklegen)?

Diese Anzahl heisst die Anzahl der *Kombinationen (ohne Wiederholung)* und ist gegeben durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}.$$

Diese Formel wird sehr oft gebraucht. Ihre Herleitung geht wie folgt. Für die Auswahl des ersten Objektes stehen uns noch alle n zur Verfügung. Das zweite Objekt müssen wir dann aus den restlichen $n-1$ auswählen, das dritte aus den verbleibenden $n-2$, usw., bis wir das k-te Objekt aus den restlichen $n-(k-1) = n-k+1$ Objekten auswählen müssen. Also können wir auf diesem Weg $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n\,!}{(n-k)\,!}$ Sequenzen der Länge k bilden. Nun interessieren wir uns aber nicht für die Reihenfolge, in der die Objekte gezogen worden sind; also identifizieren wir alle Sequenzen, die durch reines Vertauschen der Reihenfolge auseinander entstehen bzw. durch reines Vertauschen ineinander überführt werden können. Nach 1) können die gezogenen k Objekte auf $k\,!$ Arten angeordnet werden; jede Menge von k Objekten erzeugt also die $(k\,!)$-fache Anzahl von Anordnungen, die wir miteinander identifizieren, und damit erhalten wir die gesuchte

Anzahl, indem wir den obigen Wert noch durch $k!$ dividieren. Das liefert gerade das Ergebnis $\binom{n}{k}$.

Nun betrachten wir die n Objekte als Symbole, die wir beliebig oft benutzen dürfen; wir können die Objekte also wiederholt (mit Zurücklegen) ziehen.

3) Wie viele Sequenzen der Länge m kann man mit den n Symbolen bilden?

Diese Anzahl heisst die Anzahl der *Variationen (mit Wiederholung)* und ist gegeben durch

$$n^m.$$

Das ist ganz einfach herzuleiten. Für jeden der m Plätze in der Sequenz hat man jedes der n Symbole zur Verfügung (da man ja wiederholen darf), also jeweils n Möglichkeiten für jeden Platz, die man mit jeder Möglichkeit für die anderen Plätze kreuzen kann. Also gibt es $n \times n \times \cdots \times n = n^m$ Möglichkeiten, eine Sequenz zu bilden.

Literatur: Bronstein/Semendjajew/Musiol/Mühlig, "Taschenbuch der Mathematik", Verlag Harri Deutsch, 4. Auflage (1999); Abschnitt 16.1 über Kombinatorik.