

Musterlösung zur Übung 1

1. a) Im Dot-Plot (Abbildung 1) sind Unterschiede bezüglich der Lage der vier Gruppen sichtbar. Das arithmetische Mittel der Gruppen 1 und 4 ist deutlich höher als das arithmetische Mittel der Gruppen 2 und 3. Ob diese Unterschiede "signifikant" sind, kann nur mit einiger Erfahrung direkt aus dem Dot-Plot abgeschätzt werden. Extreme Beobachtungen sind keine zu erkennen. Ferner fällt auf, dass die Daten in der Gruppe 4 stärker streuen als die Daten in den übrigen Gruppen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Voraussetzung, dass alle Fehler e_{ij} die gleiche Varianz haben, verletzt sein könnte.

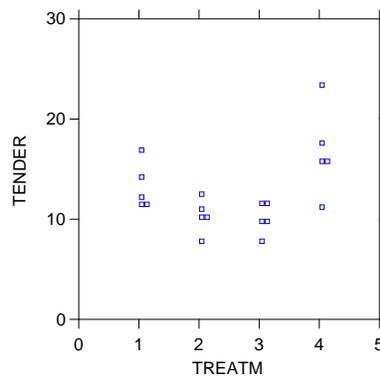


Abbildung 1:

b) LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:
TREATM 1.000 2.000 3.000 4.000

DEP VAR: TENDER N: 20 MULTIPLE R: 0.741 SQUARED MULTIPLE R: 0.550

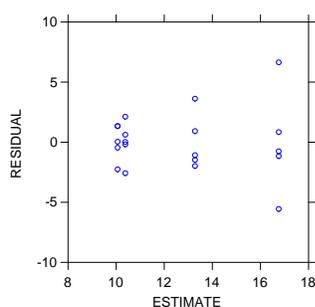
ANALYSIS OF VARIANCE					
SOURCE	SUM-OF-SQUARES	DF	MEAN-SQUARE	F-RATIO	P
TREATM	145.732	3	48.577	6.513	0.004
ERROR	119.340	16	7.459		

Der P-Wert für den Faktor TREATM ist kleiner als 0.05, d. h. die Nullhypothese $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ bzw. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ wird auf dem 5 % Niveau verworfen. Dies bedeutet, dass sich mindestens zwei Behandlungen signifikant unterscheiden.

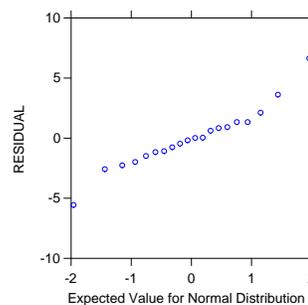
- c) Im Tukey-Anscombe-Plot (s. Abbildung 2) ist ein „Trichter“ erkennbar. Die Residuen streuen mit zunehmendem Schätzwert stärker. Anders formuliert: in den Gruppen mit hohem Gruppenmittel scheint die Varianz der Fehler σ_e^2 grösser zu sein als in den Gruppen mit tieferem Gruppenmittel. Damit liegt ein deutlicher Hinweis auf die Verletzung der Voraussetzung gleicher Fehlervarianz in den Gruppen vor.

Die beiden „gekrümmten Enden“ im Normal-Plot (Abbildung 2) zeigen, dass die Verteilung der Residuen deutlich „langschwänziger“ ist als die Normalverteilung, d. h. dass verglichen mit der Normalverteilung zu viele „extreme Werte“ vorkommen. Damit liegt ein weiterer Hinweis auf die Verletzung einer Modellvoraussetzung vor: die Annahme, dass die Fehler e_{ij} identisch normalverteilt sind.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass beide Residuenplots auf die Verletzung von Modellvoraussetzungen hinweisen. Dies bedeutet, dass die in der Teilaufgabe **b)** berechnete Varianzanalysetabelle mit Vorsicht zu genießen ist, da sie aufgrund nicht erfüllter Voraussetzungen berechnet wurde, und dass die Suche nach einem anderen, besseren Modell losgehen kann...



(a) Tukey-Anscombe-Plot



(b) Normal-Plot

Abbildung 2:

- d)** Die Transformation hat die Streuung in den vier Gruppen homogenisiert (siehe Abbildung 3). Zwar scheinen die Daten in der Gruppe vier noch immer etwas stärker zu streuen, doch der Unterschied zu den anderen Gruppen ist deutlich geringer geworden.

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:

TREATM 1.000 2.000 3.000 4.000

DEP VAR: LOGTEND N: 20 MULTIPLE R: 0.755 SQUARED MULTIPLE R: 0.569

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE	SUM-OF-SQUARES	DF	MEAN-SQUARE	F-RATIO	P
TREATM	0.801	3	0.267	7.053	0.003
ERROR	0.606	16	0.038		

Der P-Wert für den Faktor TREATM hat sich kaum verändert. Interpretation analog zur Teilaufgabe b).

- e)** Der Trichter im Tukey-Anscombe-Plot ist weniger ausgeprägt. Im Normal-Plot sind die gekrümmten Enden verschwunden. Die Modellvoraussetzungen scheinen nun besser erfüllt zu sein. (Siehe Abbildung 4)

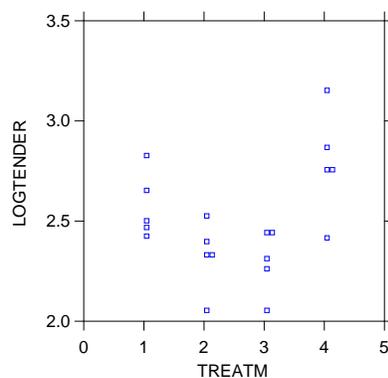
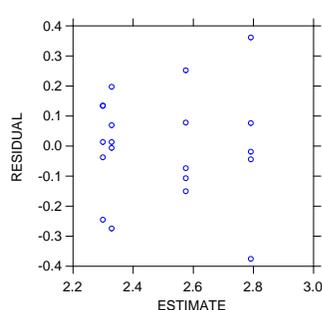
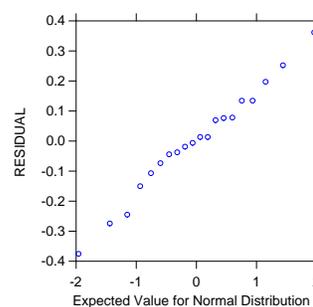


Abbildung 3:



(a) Tukey-Anscombe-Plot



(b) Normal-Plot

Abbildung 4:

2. a) Wir berechnen das folgende Modell

$$\begin{aligned}
 Y_{ijkl} = & \quad \mu & + & \quad \alpha_i & + & \quad \beta_j & + & \quad \gamma_k \\
 & \text{globales Mittel} & & \text{Sorte} & & \text{Feld} & & \text{Saat} \\
 & + & (\alpha\beta)_{ij} & + & (\alpha\gamma)_{ik} & + & (\beta\gamma)_{jk} \\
 & & \text{Sorte*Feld} & & \text{Sorte*Saat} & & \text{Feld*Saat} \\
 & + & (\alpha\beta\gamma)_{ijk} & + & \varepsilon_{ijkl} & & (l = 1, 2) \\
 & & \text{Sorte*Feld*Saat} & & \text{Fehler} & &
 \end{aligned}$$

mit $\varepsilon_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2)$ unabhängig

Damit das Modell schätzbar ist, bestehen für die Koeffizienten diverse Nebenbedingungen, wie etwa

$$\sum_i \alpha_i = 0; \quad \sum_j \beta_j = 0; \quad \sum_k \gamma_k = 0; \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0; \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0; \dots$$

(**Bemerkung:** Die Nebenbedingungen sind je nach Literatur und Programmpaket verschieden definiert.)

Die totale Quadratsumme SST kann wieder zerlegt werden in

$$SST = SS_\alpha + SS_\beta + SS_\gamma + SS_{\alpha*\beta} + SS_{\alpha*\gamma} + SS_{\beta*\gamma} + SS_{\alpha*\beta*\gamma} + SSE$$

Mit den entsprechenden F-Tests können die Hypothesen des Einflusses der Haupt- resp. Wechselwirkungs (WW)-Effekte getestet werden, z.B. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_5 = 0$ (in Worten: die Sorte hat keinen Einfluss auf den Ertrag).

Im folgenden Output der dreifaktoriellen Varianzanalyse sehen wir, dass neben den drei Haupteffekten auch der WW-Effekt Saat*Feld signifikant ist. Dies erschwert die Interpretation der Haupteffekte von Saat und Feld.

```

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:
SORTE$  Arina      Boval      Forno      Galaxie    Tamaro
SAAT    150.000      400.000
FELD    1.000        2.000      3.000      4.000

DEP VAR: GEWICHT      N:      80  MULTIPLE R: 0.961  SQUARED MULTIPLE R: 0.924
      ANALYSIS OF VARIANCE
SOURCE      SUM-OF-SQUARES  DF  MEAN-SQUARE  F-RATIO  P
SORTE$      .482674E+08    4   .120668E+08  70.941   0.000
SAAT        .210535E+08    1   .210535E+08  123.773  0.000
FELD        5974455.000   3   1991485.000  11.708   0.000
SORTE$*SAAT 217930.000     4    54482.500   0.320    0.863
SORTE$*FELD 2362270.000    12   196855.833  1.157    0.345
SAAT*FELD   2240680.000    3    746893.333  4.391    0.009
SORTE$*SAAT
*FELD       3170220.000   12   264185.000  1.553    0.146
ERROR       6803900.000   40   170097.500

```

- b) Wir reduzieren das Modell auf die signifikanten Haupt- und WW-Effekte. Bei der Zerlegung der totalen Quadratsumme SST gehen beim reduzierten Modell die Summanden $SS_{\alpha*\beta}$, $SS_{\alpha*\gamma}$ und $SS_{\alpha*\beta*\gamma}$ in den Fehlerterm SSE ein. Dies sieht man durch die Addition der Quadratsummen oder einfacher durch die Untersuchung der Freiheitsgrade:

volles Modell SSE hat 40 df
reduziertes Modell: SSE hat 68 df
 (40 (SSE volles Modell) + 12 (Sorte*Feld) + 4 (Saat*Sorte)
 + 12 (Sorte*Feld*Saat) = 68)

```

DEP VAR: GEWICHT      N:      80  MULTIPLE R: 0.928  SQUARED MULTIPLE R: 0.861
      ANALYSIS OF VARIANCE
SOURCE      SUM-OF-SQUARES  DF  MEAN-SQUARE  F-RATIO  P
SORTE$      .482674E+08    4   .120668E+08  65.360   0.000
SAAT        .210535E+08    1   .210535E+08  114.036  0.000
FELD        5974455.000   3   1991485.000  10.787   0.000
SAAT*FELD   2240680.000    3    746893.333  4.046    0.010
ERROR       .125543E+08    68   184622.353

```

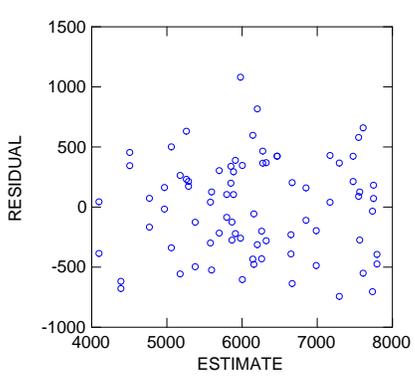
Die WW Saat*Feld bleibt signifikant (P-Wert=0.01).

Beachte: Durch das Weglassen der nicht-signifikanten WW wurde MS(Fehler) etwas grösser. Die MS-Werte der Effekte und WW bleiben unverändert. Dies kann in gewissen Fällen dazu führen, dass eine im vollen Modell schwach signifikante WW im reduzierten Modell nicht mehr signifikant ist.

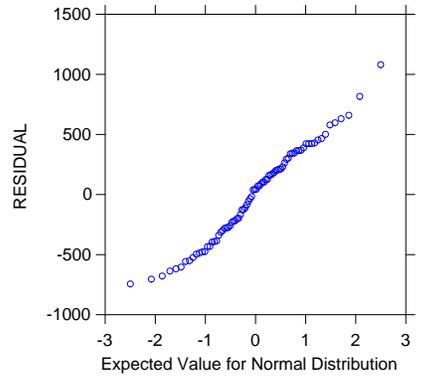
Die signifikante WW erschwert eine gute und sinnvolle Interpretation der zugehörigen Haupteffekte von Saat und Feld.

Der Tukey-Anscombe-Plot zeigt das erwünschte Bild: die Residuen streuen in einem Band mit konstanter Breite um die Nulllinie. Aus dem Normalplot ist keine Verletzung der Normalverteilungsannahme ersichtlich: die Punkte liegen ungefähr auf einer Geraden.

Die Annahme $\varepsilon_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2)$ ist gerechtfertigt.

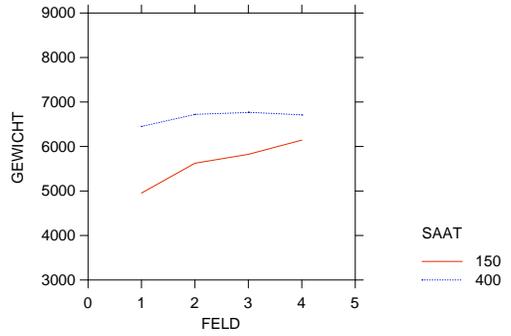


(a) Tukey-Anscombe-Plot



(b) Normal-Plot

c)



Wir interessieren uns, weshalb die WW Saat*Feld signifikant ist. Dazu ist der Interaktionsplot als grafische Methode gut geeignet (wir zeichnen das Gewicht für die verschiedenen Felder bei konstant gehaltenen Saatdichten). Ohne Wechselwirkung müssten die Kurven parallel sein. Für SAAT=400 ist die Kurve nahezu konstant (zu- und abnehmend), währenddem sie für SAAT=150 deutlich ansteigt. Mit den erlaubten monotonen Transformationen ist es nicht möglich, diese beiden Kurven in parallele Kurven überzuführen (d.h. die WW Saat*Feld zu eliminieren). Dies bedeutet, dass eine Analyse getrennt nach z.B. der Saatdichte angebracht ist.

d)

```

SAAT = 150.000
DEP VAR: GEWICHT      N:      40  MULTIPLE R: 0.966  SQUARED MULTIPLE R: 0.933
      ANALYSIS OF VARIANCE
SOURCE      SUM-OF-SQUARES  DF  MEAN-SQUARE    F-RATIO    P
SORTE$      .257622E+08      4   6440537.500    49.305     0.000
FELD        7600407.500      3   2533469.167    19.395     0.000
SORTE*$FELD 3184030.000      12  265335.833     2.031     0.078
ERROR       2612550.000      20  130627.500
    
```

Die WW Sorte*Feld ist nicht signifikant, d.h. die Haupteffekte können interpretiert werden. Feld und Sorte haben einen signifikanten Einfluss auf den Ertrag. Da die WW nicht signifikant ist, ist der Einfluss der Sorte auf jedem Feld gleich, d.h. der Übergang von einer Sorte zu einer anderen hat auf jedem Feld die gleiche mittlere Ertragsänderung zur Folge.

SAAT = 400.000

DEP VAR: GEWICHT		N: 40	MULTIPLE R: 0.927	SQUARED MULTIPLE R: 0.860	
ANALYSIS OF VARIANCE					
SOURCE	SUM-OF-SQUARES	DF	MEAN-SQUARE	F-RATIO	P
SORTE\$.227232E+08	4	5680790.000	27.107	0.000
FELD	614727.500	3	204909.167	0.978	0.423
SORTE\$*FELD	2348460.000	12	195705.000	0.934	0.535
ERROR	4191350.000	20	209567.500		

Die WW Sorte*Feld und der Haupteffekt Feld sind nicht signifikant (dies konnte man schon bei c) vermuten). Bei dieser hohen Saatedichte spielt die unterschiedliche Feldstruktur offenbar nur noch eine untergeordnete Rolle. Wenn die Bodenqualität generell in einem unkritischen Bereich ist, können Unterschiede mit einer hohen Saatedichte „überspielt“ werden.

Kurz-Übung 1

- a) Die α -Effekte werden durch die Differenzen der Gruppenmittel vom Gesamtmittel geschätzt (s. Skript Formel 1.20)

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}_{..},$$

wobei

$$\bar{y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g n_i \bar{y}_i.$$

(g ist die Anzahl der verschiedenen Stämme, d.h der verschiedenen Stufen des Faktors. n_i ist die Anzahl Beobachtungen der i^{te} Stufe.) Es gilt also

$$\bar{y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^g n_i \bar{y}_i = \frac{1}{24} \cdot 6 \cdot (420.3 + 330.7 + 540.4 + 450.8) = 435.55$$

und somit

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= \bar{y}_1 - \bar{y}_{..} = 420.3 - 435.55 = -15.25 \\ \hat{\alpha}_2 &= \bar{y}_2 - \bar{y}_{..} = 330.7 - 435.55 = -104.85 \\ \hat{\alpha}_3 &= \bar{y}_3 - \bar{y}_{..} = 540.4 - 435.55 = 104.85 \\ \hat{\alpha}_4 &= \bar{y}_4 - \bar{y}_{..} = 450.8 - 435.55 = 15.25 \end{aligned}$$

(Kontrolle: $\sum_{i=1}^4 \hat{\alpha}_i = -15.25 - 104.85 + 104.85 + 15.25 = 0$)

- b) Die Summe der Quadrate zwischen den Gruppen $SS(Z)$ ist gegeben durch

$$SS(Z) = \sum_{i=1}^g n_i (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^g n_i \hat{\alpha}_i^2.$$

Also

$$SS(Z) = 6 \cdot ((-15.25)^2 + (-104.85)^2 + 104.85^2 + 15.25^2) = 134713.02.$$

Die Summe der Quadrate innerhalb der Gruppen $SS(I)$ ist gegeben durch

$$SS(I) = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

Die Varianz s_i^2 innerhalb der Gruppen ist definiert durch

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i.)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i.)^2 = (n_i - 1)s_i^2$$

Also

$$SS(I) = \sum_{i=1}^g (n_i - 1)s_i^2 = 5 \cdot (30.2^2 + 28.9^2 + 31.1^2 + 33.3^2) = 19116.75.$$

c) Varianzanalyse-Tabelle:

Variationsursache	SS	df	MS=SS/df	F-Wert
Stamm (Z)	134713.02	3	44904.36	46.98
Fehler (I)	19116.75	20	955.84	
Total	153829.77	23		

Bemerkung: Die Anzahl Freiheitsgrade (df) ist gegeben durch

$$SS(Z) : \quad g - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$SS(I) : \quad n - g = 24 - 4 = 20$$

Der F -Wert ist der Quotient der beiden Durchschnittsquadrate:

$$F\text{-Wert} = \frac{MS(Z)}{MS(I)} = \frac{44904.36}{955.84} = 46.98$$

d) Gemäss der Tabelle ist das 95%-Quantil der F -Verteilung mit 3 und 20 Freiheitsgraden $F_{3,20;0.95} = 3.10$.

Da der F -Wert = 46.979 > 3.1 ist, wird die Nullhypothese $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ auf dem 5%-Niveau klar verworfen.

Kurz-Übung 2

a)

Ursache	df	SS	MS	F-Wert
Sorte	2	327.2	163.6	102.9
Dichte	3	86.7	28.9	18.2
Sorte*Dichte	6	8.1	1.34	0.845
Fehler	24	38.2	1.59	
Total	35	460.2		

Die obigen Freiheitsgrade ergeben sich direkt aus der Tabelle auf S. 14 im Skript Varianzanalyse I, Kap. 2. Damit kann man in jeder Zeile wo MS bekannt ist, auch SS berechnen, und umgekehrt. Den Rest erhält man folgendermassen:

$$\begin{aligned} SS(\text{Sorte}) &= 4 \cdot 3 \cdot ((11.33 - 13.89)^2 + (12.21 - 13.89)^2 + (18.12 - 13.89)^2) \\ &= 327.2 \end{aligned}$$

$$MS(\text{Sorte} * \text{Dichte}) = 1.59 \cdot 0.845 = 1.34$$

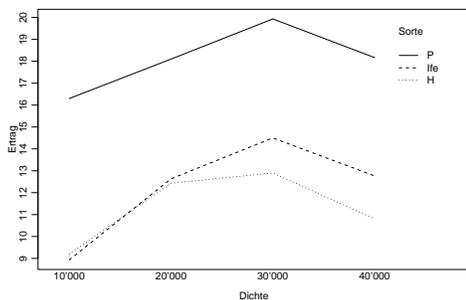
$$\begin{aligned} SS(\text{Dichte}) &= SS(\text{Total}) - SS(\text{Sorte}) - SS(\text{Sorte} * \text{Dichte}) - SS(\text{Fehler}) \\ &= 460.2 - 327.2 - 8.1 - 38.2 = 86.7 \end{aligned}$$

Wäre am Anfang nur MS(Fehler) vorgegeben gewesen, aber nicht SS(Total) und der F-Wert für Sorte*Dichte, dann müssten wir SS(Dichte) und SS(Sorte*Dichte) explizit berechnen:

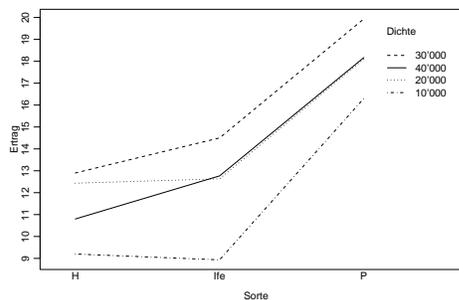
$$\begin{aligned} \text{SS(Dichte)} &= 3 \cdot 3 \cdot ((11.48 - 13.89)^2 + (14.39 - 13.89)^2 + \dots) = 86.7 \\ \text{SS(Sorte * Dichte)} &= 3 \cdot (\\ &\quad (9.20 - 11.48 - 11.33 + 13.89)^2 + \\ &\quad (8.93 - 11.48 - 12.21 + 13.89)^2 + \\ &\quad (16.30 - 11.48 - 18.12 + 13.89)^2 + \\ &\quad (12.43 - 14.39 - 11.33 + 13.89)^2 + \dots \\ &\quad \dots + (18.17 - 13.91 - 18.12 + 13.89)^2) = 8.1 \end{aligned}$$

Bemerkung: da in der Aufgabenstellung nur die Mittelwerte von jeweils drei Wiederholungen angegeben wurden, können wir die Varianzanalysetabelle nur berechnen, wenn wir noch eine (evtl. indirekte) Information über die Grösse des Fehlers erhalten, also entweder SS(Fehler), MS(Fehler), SS(Total) oder einen der drei F-Werte.

- b) i) $F_{2,24;0.95} = 3.4 < 102.9 \implies H_0$: “Faktor Sorte hat keinen Effekt” verwerfen, also hat Sorte signifikanten Effekt.
 ii) $F_{3,24;0.95} = 3.01 < 18.2 \implies H_0$: “Faktor Dichte hat keinen Effekt” verwerfen, also hat Dichte signifikanten Effekt.
 iii) $F_{6,24;0.95} = 2.51 > 0.845 \implies H_0$: “Interaktion hat keinen Effekt” beibehalten, die Interaktion hat also keinen signifikanten Effekt.
- c) Es gibt zwei Möglichkeiten, den Interaktionsplot zu zeichnen (s. Abb. 5). Aus dem Interaktionsplot sehen wir, dass Sorte P kombiniert mit einer Dichte von 30'000 Pflanzen/ha die besten Erträge ergibt.



(c) Ertrag pro Sorte gegen Dichte



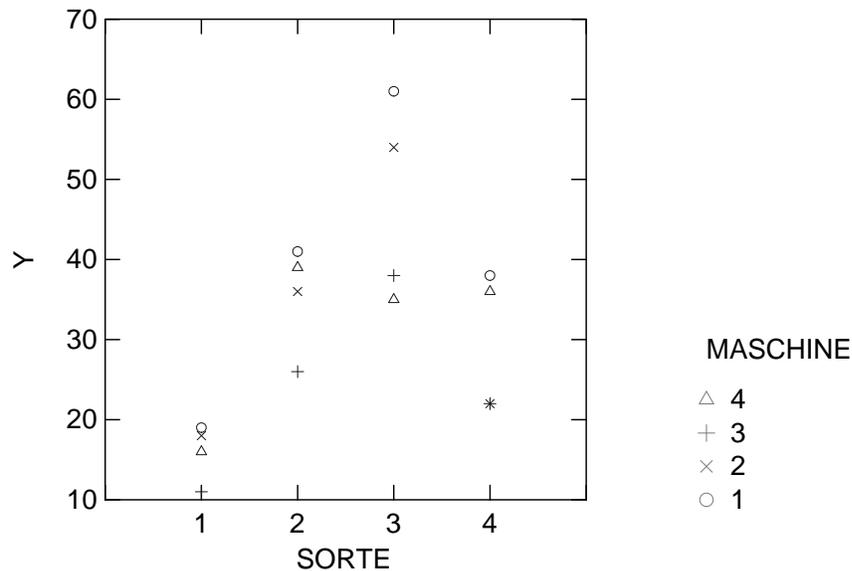
(d) Ertrag pro Dichte gegen Sorte

Abbildung 5: Interaktionsplot - beide Möglichkeiten

- d) Die Linien im Interaktionsplot verlaufen ziemlich parallel. Es gibt nur eine Überschneidung, und auch diese existiert nur knapp. Dies spricht alles dafür, dass die Interaktion nicht signifikant ist. Dies entspricht genau dem Resultat aus der Varianzanalysetabelle.

Kurz-Übung 3

- a) Wir betrachten *Maschine* als Blockfaktor, weil uns der Einfluss dieser Grösse eigentlich nicht interessiert.



b) Das Streudiagramm sieht so aus:

c) Es ist:

$$H_0: \mu_1 = \mu_3 \text{ (mittleres Niveau von Sorte 1 und 3 sind gleich)}$$

$$H_A: \mu_1 \neq \mu_3$$

Nun ist:

$$d_{13} = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3 = 16 - 47 = -31$$

und

$$s(d_{13}) = \hat{\sigma}_e \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}} = \sqrt{42.833} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{42.833}{2}} = 4.628$$

Es folgt:

$$\text{t-Wert} = \frac{d_{13}}{s(d_{13})} = \frac{-31}{4.628} = -6.699 .$$

Aus der t-Tabelle:

$$t_{9;97.5\%} = 2.262.$$

Somit ist der Verwerfungsbereich

$$\{\text{t-Wert: t-Wert} < -2.262 \text{ oder t-Wert} > 2.262\} = \{\text{t-Wert: } |\text{t-Wert}| > 2.262\}.$$

Deshalb wird H_0 verworfen: es gibt einen signifikanten Unterschied zwischen der Sorte 1 und der Sorte 3.

d) Wir finden:

	3	2	4	1
Fisher	a	b	b	c

e) Die Anzahl der Vergleiche auf dem 5% Niveau ist gleich 6. Deshalb ist

$$P_{Bonferroni} = \min\{6 \cdot P_{Fisher}, 1\}$$

und es folgt:

Bonferroni Adjustment.

Matrix of pairwise comparison probabilities:

SORTE	1	2	3	4
1	1.000			
2	0.012	1.000		
3	0.000	0.210	1.000	
4	0.102	1.000	0.024	1.000

Genauer kriegen wir mit SYSTAT:

Bonferroni Adjustment.

Matrix of pairwise comparison probabilities:

	1	2	3	4
1	1.000			
2	0.014	1.000		
3	0.001	0.208	1.000	
4	0.103	1.000	0.026	1.000

Wir finden:

	3	2	4	1
Bonferroni	a	ab	bc	c

- f) Die Berücksichtigung des Blockfaktors steigert die Effizienz des Experimentes: ein Teil der Variabilität der Zielvariable Y wird durch den Blockfaktor erklärt. Ohne Berücksichtigung des Blockfaktors (Modell: $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$) ergäbe sich folgende Varianzanalysetabelle (die df und SS des Blockfaktors und des Fehlers werden zusammengezählt und bilden den neuen Fehler):

Dep Var: Y N: 16 Multiple R: 0.835 Squared multiple R: 0.697

Analysis of Variance

Source	Sum-of-Squares	df	Mean-Square	F-ratio	P
SORTE	1998.000	3	666.000	9.207	0.002
Error	868.000	12	72.333		

Beachte: der F-Wert beträgt 9.207. Er ist damit kleiner als der F-Wert mit Berücksichtigung des Blockfaktors (F-Wert = 15.549).

Kommentar:

Varianzanalyse mit dem Blockfaktor: Der Faktor Sorte hat einen signifikanten Einfluss auf Y. Der Faktor Maschine ist knapp nicht signifikant.

Varianzanalyse ohne den Blockfaktor:

Der Faktor Sorte ist immer noch signifikant, allerdings nicht mehr so stark.