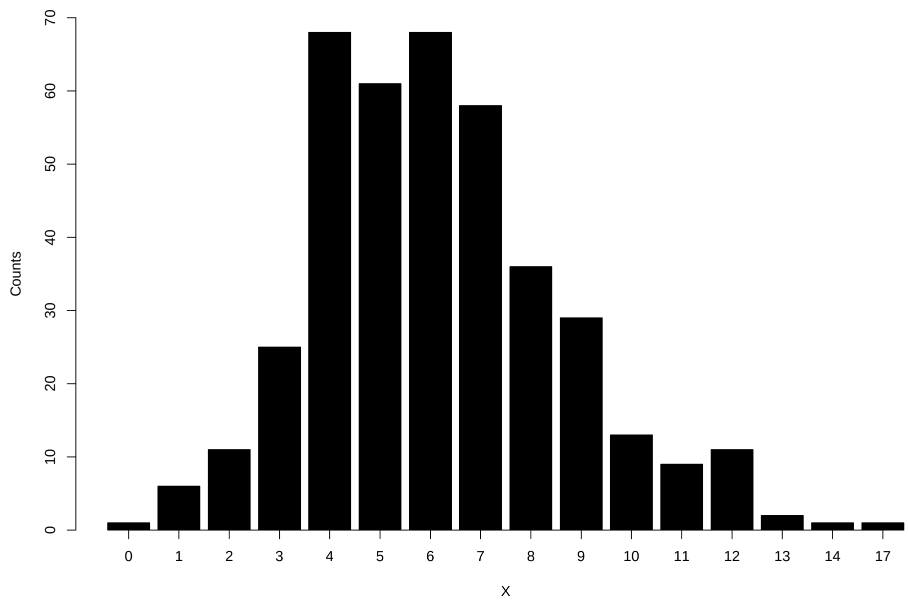
Musterlösung zur Übungsserie 3

1. **a)** Das Stabdiagramm (=Balkendiagramm) deutet auf eine Poissonverteilung hin.



Natürlich käme auch eine Binomialverteilung $Bin(n, p)$ in Frage, da wir aber keine Information über n haben (aufpassen: 400 ist die Anzahl simulierter Zahlen), müssten wir auch dieses schätzen, mithin also einen Parameter mehr als für die Poissonverteilung.

b) Da für $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ gilt es $\mathbf{E}[X] = \lambda$, wird der Parameter λ der Poissonverteilung geschätzt durch den Mittelwert der beobachteten Daten:

$$\widehat{\lambda} = \overline{x} = 6.152\,.$$

Bei der Poissonverteilung sind Erwartungswert und Varianz beide gleich λ. Eine einfache Art zu überprüfen, ob sich die Daten mit dieser Verteilung vereinbaren lassen, ist zu schauen, ob der Quotient

$$\frac{\overline{x}}{s^2} \approx 1$$

ergibt. In unserem Fall ist $\widehat{\text{Var}}(X) = s^2 = 6.230$ und der Quotient somit gleich 0.987. Die Daten lassen sich also gut mit einer Poissonverteilung erklären.

2. **a)** Die Anzahl X schwerer Unfälle pro Monat ist Poissonverteilt mit Parameter $\lambda = 0.9$. Es gilt

$$\text{P}[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\,, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

und somit haben wir folgende Wahrscheinlichkeiten

- kein Unfall $\rightarrow \text{P}[X = 0] = 0.41$
- ein Unfall $\rightarrow \text{P}[X = 1] = 0.37$

- mehr als ein Unfall $\rightarrow \mathrm{P}[X > 1] \;=\; 1 - \mathrm{P}[X \leq 1] \;=\; 1 - \sum_{k=0}^{1} \mathrm{P}[X = k] \;=\; 0.22$

b) Sei X_i die Anzahl schwerer Unfälle pro Monat i. Nach Aufgabenstellung ist

$$X_i \;\sim\; \mathrm{Poisson}(0.9)\,.$$

Die Anzahl Unfälle X pro Jahr ist dann die Summe der monatlichen Unfälle X_i. Da die Summe Poissonverteilter Zufallsvariablen wieder Poissonverteilt ist und für den Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}\left[X\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{12} X_i\right] = \sum_{i=1}^{12} \mathbf{E}\left[X_i\right] = 12 \cdot 0.9 = 10.8,$$

haben wir

$$X \;=\; \sum_{i=1}^{12} X_i \;\sim\; \mathrm{Poisson}(10.8)\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich auf der nicht sanierten Kreuzung, 4 oder weniger Unfälle pro Jahr ereignen, ist dann

$$\mathrm{P}[X \leq 4] \;=\; \sum_{k=0}^{k=4} \mathrm{P}[X = k] \;=\; 0.02\,.$$

Weil diese Wahrscheinlichkeit so klein ist, können wir schliessen, dass die Situation sich gebessert hat.

3. Die Zufallsvariablen sind sinnvollerweise folgendermassen zu modellieren:

$X^{(a)}$	:	Poissonverteilung
$X^{(b)}$	:	Binomialverteilung (unter der Annahme, dass ein fauler Apfel die anderen nicht "mitansteckt")
$X^{(c)}$	:	Poissonverteilung
$X^{(d)}$	:	keine der beiden Verteilungen, denn $X^{(d)}$ kann den Wert 0 nicht annehmen (sondern eine "geometrische Verteilung")
$X^{(e)}$	:	Poissonverteilung
$X^{(f)}$	:	Binomialverteilung
$X^{(g)}$	:	keine der beiden Verteilungen (ist z.B. stetig verteilt, nicht diskret!)

4. a) Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 0 (kein Gewinn) und c (Gewinn) an.
Die Zufallsvariable Y nimmt die Werte 0 (kein Gewinn in beiden Lotterien), c (Gewinn nur in einer der beiden Lotterien) und $2c$ (Gewinn in beiden Lotterien).

Für X gilt (Erinnerung: Nur ein Los gewinnt):

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[X = 0\right] &= \mathrm{P}\left[\text{beide Lose geben keinen Gewinn}\right] = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} = \frac{n-2}{n} \\ \mathrm{P}\left[X = c\right] &= 1 - \mathrm{P}\left[X = 0\right] = \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Für Y gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[Y = 0\right] &= \mathrm{P}\left[\text{kein Gewinn in beiden Lotterien}\right] = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ \mathrm{P}\left[Y = c\right] &= \mathrm{P}\left[\text{Gewinn nur in einer der beiden Lotterien}\right] = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{2n-2}{n^2} \\ \mathrm{P}\left[Y = 2c\right] &= \mathrm{P}\left[\text{Gewinn in beiden Lotterien}\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

Beachte: die Summe $\mathrm{P}[Y=0]+\mathrm{P}[Y=c]+\mathrm{P}[Y=2c]$ soll 1 geben!

b) Man findet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= 0\cdot\frac{n-2}{n}+c\cdot\frac{2}{n}=\frac{2c}{n}\\
\mathbf{E}[Y] &= 0\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+c\cdot\frac{2n-2}{n^2}+2c\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{2c}{n}
\end{aligned}$$

D.h. beide "Strategien" X und Y haben den gleichen Erwartungswert (erwarteten Gewinn).

c) Man findet:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E[X^2]-(E[X])^2=c^2\frac{2}{n}-\frac{4c^2}{n^2}=\frac{2c^2}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)\\
\mathrm{Var}(Y) &= E[Y^2]-(E[Y])^2=c^2\cdot\frac{2n-2}{n^2}+4c^2\frac{1}{n^2}-4c^2\frac{1}{n^2}=\frac{2c^2}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt: $\mathrm{Var}(X)<\mathrm{Var}(Y)$, d.h. mit der "Strategie" X hat man eine kleinere Streuung des Gewinnes.

5. a) Man geht davon aus, dass jede Farb-Geschmackkombination mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p richtig erkannt wird. Somit ist für jede Person die Anzahl X richtig erkannter Joghurtproben binomialverteilt mit $n=4$ und Erfolgswahrscheinlichkeit p: $X\sim\mathrm{Bin}(n=4,p)$.

b) Die mittlere, richtig erkannte Anzahl Joghurte pro Person ist

$$\frac{(0\cdot 0+2\cdot 1+15\cdot 2+8\cdot 3+0\cdot 4)}{25} = 2.24\,.$$

Da für $X\sim\mathrm{Bin}(n,p)$ gilt es $\mathbf{E}[X]=n\cdot p$, wird p geschätzt durch

$$\widehat{p} = \frac{2.24}{4} = 0.56\,.$$

c) Nach Aufgabenstellung ist die Anzahl X richtig erkannter Joghurte pro Person binomialverteilt mit Parametern $n=4$ und $p=0.56$. Mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{P}[X=a] = \frac{n!}{(n-a)!a!}\,p^a\,(1-p)^{n-a}$$

erkennt also jemand a Aromen. Also müssten im Durchschnitt $25\cdot\mathrm{P}[X=a]$ Personen a Aromen erkennen.

a	$\mathrm{P}[X=a]$	theor. Häufigkeit $25\cdot\mathrm{P}[X=a]$	beob. Häufigkeit
0	0.0375	0.94	0
1	0.1908	4.77	2
2	0.3643	9.11	15
3	0.3091	7.73	8
4	0.0983	2.46	0

Die theoretisch erwarteten und die beobachteten Werte stimmen sehr schlecht überein. Es gibt niemanden, der kein Aroma erkennen kann und niemanden, der alle Aromen richtig erkennen kann, dafür viel zu viele, die 2 Aromen erkennen. Der wichtigste Grund dafür, dass die Binomialverteilung hier schlecht passt, dürfte darin liegen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit p nicht konstant ist für alle vier Joghurtproben. Die Gelb-Zitrone Kombination wird bestimmt von fast allen erkannt.