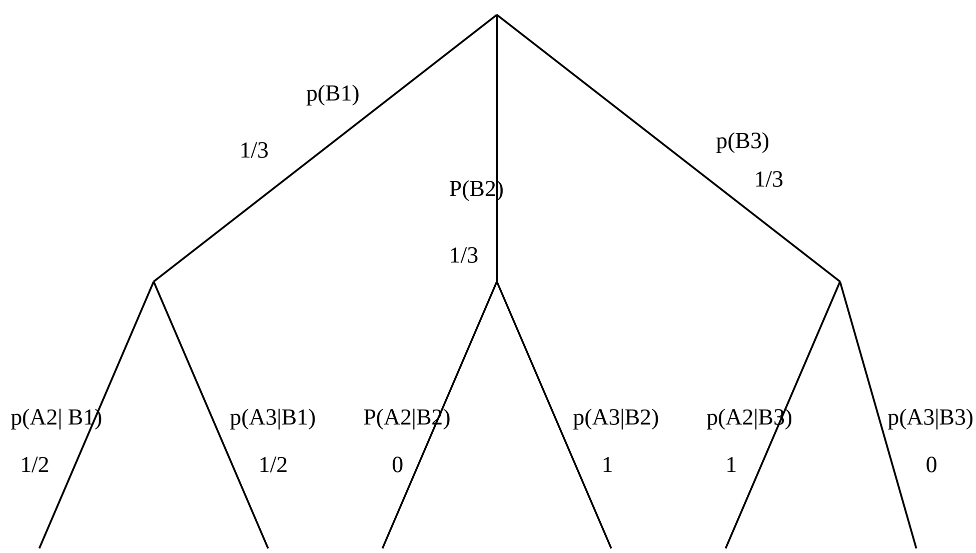
Ziegenproblem

“Ziegenproblem”:
In einem Quiz ist ein Auto zu gewinnen, das hinter einer von drei Türen versteckt ist. Quizmaster zum Kandidaten: “Wählen Sie eine Tür, bitte!” Der Kandidat wählt eine Tür, doch bevor er sie öffnet, ruft der Quizmaster: “ Halt, ich zeige Ihnen, hinter welcher der verbleibenden Türen das Auto nicht ist.” Er zeigt sie und fragt: “Wollen Sie immer noch Ihre Tür, oder wollen Sie vielleicht doch wechseln?”
Würdest Du wechseln? (Begründung!)

Lösung:
OBdA wählt der Kandidat die Tür 1. (D.h. der Kandidat könnte auch Tür 2 oder 3 wählen, ohne dass sich etwas an der Aussage zur Strategie ändern würde.) Dann betrachte man folgendes Diagramm:



Die Ereignisse $A_i, i = 1 \dots 3$ und $B_i, i = 1 \dots 3$ bedeuten das folgende:
B_i = “Das Auto steht hinter Türe i”
A_i = “Der Showmaster zeigt Türe i”
Nun berechnet man mit Hilfe des Diagramms folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten:
Zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Ereignisse, wenn der Showmaster Tür 2 öffnet.

$$p(B_1|A_2) = \frac{p(A_2|B_1)p(B_1)}{\sum_{i=1}^{3} p(A_2|B_i)p(B_i)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$p(B_2|A_2) = 0$$

$$p(B_3|A_2) = \frac{p(A_2|B_3)p(B_3)}{\sum_{i=1}^{3} p(A_2|B_i)p(B_i)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Die Interpretation ist nun folgende: Wenn der Kandidat nicht wechselt, so kommt für ihn die Wahrscheinlichkeit $p(B_1|A_2)$ in Frage, da er immer noch darauf vertraut, dass das Auto hinter Tür 1 ist (B_1), nachdem der Showmaster Tür 2 (A_2) gezeigt hat. Das Wechseln entspräche der Wahrscheinlichkeit $p(B_3|A_2)$, da er sich dann dafür entscheiden würde, das Auto sei wahrscheinlich hinter Tür 3 (B_3), nachdem der Showmaster Tür 2 (A_2) gezeigt hat. Wie man sieht, ist Wechseln günstiger.
Eine analoge Rechnung mit gleichem Ergebnis lässt sich auch für das, was "geschieht", wenn der Showmaster Tür 3 öffnet, ausführen.