Übungsserie 10

1. Nach der Vererbungslehre sollten die Genotypen AA, Aa und aa bei einem Kreuzungsversuch mit den Wahrscheinlichkeiten $(1-p)^2$, $2p(1-p)$ und p^2 auftreten. X_1 bezeichne die Häufigkeit von Genotyp AA, X_2 die Häufigkeit von Aa und X_3 die Häufigkeit von aa in einer Stichprobe vom Umfang $n = 190$. Beobachtet wurden die Anzahlen $X_1 = 10$, und $X_3 = 112$.

- **a)** Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}_{ML}$ von p.
- **b)** Ist der Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu? Wie gross ist die asymtotische Varianz von $\hat{p}_{ML}$?
- **c)** Berechnen Sie die exakte Varianz des Maximum-Likelihood-Schätzers.

2. Betrachten Sie positive i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Verteilungsfunktion

$$F(x) \;=\; 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)\,, \quad \theta > 0\,, \quad x \geq 0\,.$$

- **a)** Berechnen Sie die Dichte.
- **b)** Berechnen Sie den Erwartungswert.
  Hinweis: Das auftretende Integral kann durch Substitution und/oder partielle Integration gelöst werden. Falls Sie scheitern, benützen Sie, dass
  $$\int \sqrt{x}\exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)dx = -2\cdot\exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)\left(\frac{x}{\theta}+\frac{2\sqrt{x}}{\theta^2}+\frac{2}{\theta^3}\right).$$
- **c)** Berechnen Sie einen Schätzer von θ nach der Momenten-Methode.
- **d)** Berechnen Sie einen Schätzer von θ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

3. Die Zufallsvariable X_i habe die Dichte

$$f_\theta(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\cdot(1+x_i)^{-(1+\frac{1}{\theta})} & \text{falls } x_i > 0 \\ 0 & \text{falls } x_i \leq 0 \end{cases}$$

wobei $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ und $\theta > 0$, ein unbekannter Parameter ist. θ soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ ist.

- **a)** Zeigen Sie, dass
  $$T_n(x) := \sum_{i=1}^{n}\frac{\log(1+x_i)}{n}$$
  der Maximum-Likelihood Schätzer von θ ist.
- **b)** Muss $\theta < 1$ sein für die Maximum-Likelihood-Methode? (**Ja/Nein**) (*Keine Begründung nötig!*).

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $T_n(X) = T_n(X_1, \ldots, X_n)$.
Hinweis: Benützen Sie, dass $Y_i := \log(1 + X_i)$ die Verteilung $\text{Exp}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ besitzt, d.h $f(y) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} y}$ (kein Beweis erforderlich).

d) Ist $T_n(X)$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ? (*Begründen Sie kurz!*)

e) In diesem Beispiel hier gilt folgende Ungleichung (kein Beweis erforderlich):

$$\mathrm{P}\left[|T_n(X) - \theta| > \epsilon\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \mathrm{Var}\left(T_n(X)\right) \quad \text{für } \epsilon > 0$$

Ist der Schätzer dann konsistent? (*Begründen Sie kurz!*)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 28. Januar, 13 Uhr, im Fach der/des entsprechenden Assistentin/Assistenten im HG E18.1.

Präsenz: Montag: 12-13, LEO C12.1.