Übungsserie 5

1. Die Zufallsvariable X beschreibe die tägliche Arbeitszeit eines Ingenieurs in Stunden und habe folgende Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} c(x-7)^2 & : \quad 7 \leq x \leq 10 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimme die Konstante c.

b) Berechne die Verteilungsfunktion von X.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen 8 und 9 Stunden einnimmt.

2. Bei positiven Zufallsgrössen ist die Annahme der Normalverteilung oft nicht sinnvoll. Hingegen zeigt es sich in vielen Anwendungen, dass $\log Y$ (Logarithmus zur Basis e) genähert normalverteilt ist.

a) Berechne die kumulative Verteilungsfunktion und die Dichte der Zufallsvariablen $Y = e^X$, wobei $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. (Das heisst dann $\log Y = X$ ist normalverteilt.)

b) Berechne $\mathrm{P}\left[Y > 100\right]$ und das 5%-Quantil von Y, wenn $\log Y \sim \mathcal{N}\left(4, 0.5\right)$.

3. **a)** Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p(j,k) = \mathrm{P}\left[X = j, Y = k\right] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ & \text{und } k = 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Randverteilungen $p_X(j) = \mathrm{P}\left[X = j\right]$ und $p_Y(k) = \mathrm{P}\left[Y = k\right]$ sowie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der bedingten Verteilungen $p_{X|Y}(j|k) = \mathrm{P}\left[X = j | Y = k\right]$ und $p_{Y|X} = \mathrm{P}\left[Y = k | X = j\right]$.

b) Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Dichte:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. (Skizziere zuerst den Bereich, wo $f(x,y) > 0$.)

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3.Dezember, 13 Uhr, im Fach der/des entsprechenden Assistentin/Assistenten im HG E18.1 (hinten links, rote Fächer).

Präsenz: Montag: 12-13, LEO C12.1.